EXAMEN DE ÁLGEBRA

NOMBRE Y APELLIDOS:____

1º) Sabiendo que : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3 \quad calcular:$

$a) \left| \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4 \right| \qquad b) \begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$

2º) Dadas las matrices:

A $= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de $\alpha, \beta, \gamma \quad para\ que \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} sea\ solución\ de\ la\ ecuación \quad A.X = B$

b) $Si \ \beta = \gamma = 1\ calcular\ el\ valor\ de\ \alpha\ para\ que\ el\ sistema \ \ A\,.X = \ \ 0 \ \ sea\ compatible\ determinado.$

c) $Si \ \alpha = -1 \ , \ \beta = 1 \ \ y \ \gamma = 0\ resuelve\ la\ ecuación \ \ A.X = B$

3º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$

a) Hallar el valor de “a” para que exista la matriz inversa de A.

b) Calcular la matriz inversa de A para a=2.

4º) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 4x + 4\alpha y + 2z = 2\alpha \\ \alpha x + y - \alpha z = \alpha \\ 4\alpha x + 4\alpha y + \alpha z = 9 \end{cases}$

a) Discutirlo en función del parámetro

b) Resolverlo para $\alpha = -1$.

Elegir uno de los siguientes ejercicios:

I) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad e \quad$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz $A^2 - 4.A + 3.I$

b) Demostrar que $A^{-1} = \frac{1}{3}.(4.I - A)$

c) Calcular $(A - 2.I)^{-1}$

II) Resolver la ecuación : $\begin{vmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+1 & x \\ x & x & x+1 \end{vmatrix} = 0$

III) Resolver la ecuación matricial: $X.B = A + B$ donde

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) a) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A \Rightarrow$

$$\Rightarrow |A^4| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^4 .$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow \boxed{|A^4| = 6^4}$$

b) $$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 30$$

dos filas proporcionales

c) $$\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \left[\overset{=0}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= 4 \cdot (-3) = -12.$$

2º) a) Tenemos que resolver el sistema:

$$A \cdot X = B \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 3\alpha \qquad + \gamma = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{Como} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ el}$$

sistema es C.D. Lo resolvemos por Cramer:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2} \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-2} \qquad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \qquad \beta = \frac{9}{2} \qquad \gamma = -3$$

b) Si $\beta = \gamma = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es homogéneo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ es SCD si $rg\, A = 3. \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \alpha^2 = \alpha \cdot (1-\alpha)$

$\Rightarrow$ Si $\alpha \neq 0, 1 \Rightarrow$ <u>SCD</u>. solución única $x = y = z = 0$.

c) Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, A = rg\, A^* = 3$. Es fácil desarrollar:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 1 \\ -z = 0 \\ x + y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}}$$

3º

a) $$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = 5-2a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Existe A^{-1} si $a \neq \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

b) Si $a=2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$|A| = 5-2\cdot 2^2 = 5-8 = -3.$

$$(\text{Adj } A) = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & +2 \\ -6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & -4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1/3 & 4/3 \\ 2 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

4º $$A = \begin{pmatrix} 4 & 4\alpha & 2 \\ \alpha & 1 & -\alpha \\ 4\alpha & 4\alpha & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -20\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\left(\alpha-\frac{1}{5}\right)$$

Si $\alpha \neq 0, 1, 1/5 \Rightarrow rg A = rg A^* = 3 \Rightarrow \boxed{SCD}$.

$C_3 \leftrightarrow C_4$

Si $\alpha = 0 \Rightarrow rg A = 2$ y $rg A^* = rg\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} = 3$

$\Rightarrow \boxed{S.I}$

det ≠ 0

Si $\alpha = 1 \Rightarrow rg A = 2$ y $rg A^* = rg\begin{pmatrix} \cancel{4} & 4 & 2 & 2 \\ \cancel{1} & 1 & -2 & 1 \\ \cancel{4} & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \boxed{S.I}$

Si $\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow rg\, A = 2 \Rightarrow rg\, A^* = \begin{pmatrix} 4 & 4/5 & 2 & 2/5 \\ \frac{1}{5} & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 & 9 \end{pmatrix} = 3$

Pues el determinante $\{C_2 C_3 C_4\} \neq 0. \Rightarrow \boxed{S.I}$

b) Si $\alpha = -1 \Rightarrow rg\, A = 3$ y $rg\, A^* = 3 \Rightarrow \boxed{S.C.D}$

$|A| = 48 \Rightarrow$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ +9 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{48} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & +9 & -1 \end{vmatrix}}{48} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & +9 \end{vmatrix}}{48} = -1.$$

I

a) $A^2 - 4A + 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ -

b) Como $A^2 - 4A + 3I = 0 \Rightarrow A^2 - 4A = -3I \Rightarrow$

$\Rightarrow A(A - 4I) = -3I \Rightarrow A \cdot \left[-\frac{1}{3}(A - 4I) \right] = I \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{3}(4I - A) \right]} = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A).$

c) $(A - 2I)^2 = A^2 - 4A + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I =$

$= \underbrace{A^2 - 4A + 3I}_{\text{apartado a) es cero}} + I = 0 + I = I$

Luego $(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = I \Rightarrow$

$(A - 2I)^{-1} = (A - 2I)$

III) $X = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

Pues $X = (A+B)\cdot B^{-1}$

II) $\begin{vmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+1 & x \\ x & x & x+1 \end{vmatrix} \overset{F_1-F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -1 & x+1 & x \\ 0 & x & x+1 \end{vmatrix} \overset{F_2-F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & x \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} =$

$\overset{F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1) + 2x - 0 = 3x+1 = 0$

$\boxed{x = -1/3}$