NOMBRE Y APELLIDOS:____

1º) Dados el plano $\pi: 2x - y = 2$ $y\ la\ recta\ r: \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ se pide:

a) Determinar la posición relativa de ambos.
b) Obtener la ecuación de un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular al plano π.
c) Determinar la ecuación de una recta que pase por el punto A=(-2,1,0) , corte a la recta r y sea paralela al plano π.

2º) Dados $el\ plano\ \pi: 2x - y + 2z + 3 = 0$ $y\ la\ recta\ r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ determina:

a) La posición relativa.
b) La distancia entre ambos.
c) El punto simétrico de P = (3,2,1) respecto al plano π.

3º) Dadas las rectas $r: \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ $y\ s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ se pide:

a) Determina la posición relativa.
b) Halla la perpendicular común a ambas.

4º) Dados el punto $P = (1,0,-1),$ $el\ plano\ \pi: 2x - y + z + 1 = 0$ $y\ la\ recta\ r: \begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$ se pide:

a) Hallar el ángulo que forman la recta y el plano.
b) Calcular la distancia del punto P a la recta r.
c) Calcular la distancia del punto P al plano π.

5º) Dados el plano $\pi: x + y - z = a$ $y\ la\ recta\ r: \begin{cases} x + 2y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ determinar:

a) Su posición relativa, en función del parámetro "a".
b) La distancia en todos los casos.

1º $\vec{d_\pi}=(2,-1,0)$ $\quad \vec{d_r}=(0,1,2)$ $\quad P_r(1,2,0)$

a) $\vec{d_\pi}\cdot\vec{d_r} = (2\ \ -1\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{d_r}$ no es $\perp$ $\vec{d_\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ π y r se cortan. y como $P_r \notin \pi \Rightarrow$ Secantes en un punto

b) Si el plano pedido $\pi' \perp \pi \Rightarrow \vec{d_\pi} \parallel \pi'$
Si $r \subset \pi' \Rightarrow \vec{d_r} \parallel \pi'$ y $P_r \in \pi'$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi' \equiv \boxed{x+2y-z-5=0}$$ simplificado.

c) Si r' pedida corta $r\equiv\begin{cases}x=1\\y=2+2\lambda\\z=\lambda\end{cases} \Rightarrow \vec{AP_r}=(3,1+2\lambda,\lambda) \parallel r'$.

Como $r'\parallel\pi \Rightarrow \vec{d_{r'}}\perp\vec{d_\pi} \Leftrightarrow (3,1+2\lambda,\lambda)\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 6-1-2\lambda=0\Rightarrow\lambda=5/2\Rightarrow \vec{d_{r'}}=(3,6,5/2)\parallel(6,12,5)\Rightarrow$

$$\Rightarrow r'\equiv\begin{cases}x=-2+6\lambda\\y=1+12\lambda\\z=5\lambda\end{cases}$$

2º a) Sustituyo las ecuaciones de r en π:
$2(1-2t)-(2-2t)+2(1+t)+3=0 \Rightarrow 0=5$ ¡! $\Rightarrow$ no tienen nada en común, son paralelos.

b) $d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\dfrac{|2-2+2+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt9}=\underline{\underline{\dfrac{5\sqrt9}{9}}}$ u $\quad P_r=(1,2,1)$

c) Hallo la recta $s\perp\pi$ y que pasa por P: $\begin{cases}P(3,2,1)\\ \vec{d_r}=\vec{d_\pi}=(2,-1,2)\end{cases}$

$s=\begin{cases}x=3+2\lambda\\y=2-\lambda\\z=1+2\lambda\end{cases}$. Calculo $M=\pi\cap s$.

Sustituyo las ecuaciones de s en π:

$2(3+2\lambda)-(2-\lambda)+2(1+2\lambda)+3=0 \Rightarrow 9\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda=-1$

$\Rightarrow M(1,3,-1)$. El simétrico de P respecto a π es P' que cumple: $\frac{P+P'}{2}=M \Rightarrow$ Si $P'(x,y,z)$:

$$\left(\frac{x+3}{2},\frac{y+2}{2},\frac{z+1}{2}\right)=(1,3,-1) \Rightarrow x=-1,\ y=4,\ z=-3$$

$$\boxed{P'(-1,4,-3)}$$

3º $\vec{d_r}(1,1,1)$, $\vec{d_s}(1,1,0)$, $P_r(1,1,0)$, $P_s(1,0,3)$

a) $\overrightarrow{P_rP_s}=(0,-1,3)$: $\det\{\vec{d_r},\vec{d_s},\overrightarrow{P_rP_s}\}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&-1&3\end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ r y s se cruzan

b) determino $\pi \equiv \begin{cases}P_r(1,1,0)\\ \vec{d_r}=(1,1,1)\\ \vec{d_r}\times\vec{d_s}=(-1,1,0)\end{cases}$ y $\pi' \equiv \begin{cases}P_s(1,0,3)\\ \vec{d_s}(1,1,0)\\ \vec{d_r}\times\vec{d_s}=(-1,1,0)\end{cases}$

$$\vec{d_r}\times\vec{d_s}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=(-1,1,0)$$

$$\pi: \begin{vmatrix}x-1&y-1&z\\1&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0 \qquad \pi': \begin{vmatrix}x-1&y&z-3\\1&1&0\\-1&1&0\end{vmatrix}=0$$

$\pi:\ x+y-2=0$ $\qquad$ $\pi':\ z-3=0$

La perpendicular común es: $\begin{cases}x+y-2=0\\ z-3=0\end{cases}$

4°

a) ang (r,π): $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\vec{d_r}\cdot\vec{d_\pi}}{\|\vec{d_r}\|\cdot\|\vec{d_\pi}\|} = \left|\dfrac{(1,2,-3)\cdot(2,-1,1)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}\right| = \dfrac{|-3|}{\sqrt{84}} = \dfrac{3}{\sqrt{84}}$

$r\begin{cases}-2x+y-1=0\\ 3x-z-3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{Si } x=\lambda\\ y=+1+2\lambda\\ z=3-3\lambda\end{cases} \Rightarrow \vec{d_r}\,(1,2,-3)$

$\Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{3}{\sqrt{84}}\right) = 19^\circ\, 6'\, 24''$

b) $d(P,r) = \dfrac{\|\vec{PA}\times\vec{d_r}\|}{\|\vec{d_r}\|} = \dfrac{\sqrt{131}}{\sqrt{14}} = 3'06\ u$

$A(0,1,3) \Rightarrow \vec{PA}(-1,1,4) \Rightarrow \vec{PA}\times\vec{d_r} = \begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix} = (-11,1,-3)$

c) $d(P,\pi) = \dfrac{|2\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\ u$

5°

a) Como r viene dada por dos planos, voy a estudiar el sistema $\begin{cases}x+y-z=a\\ x+2y+az=0\\ x-2y\quad=0\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$; $|A| = 3a+4 \rightarrow 3a+4=0$
$a=-4/3$.

Si $a\neq -4/3 \Rightarrow rg\,A = 3 = rg\,A^* \Rightarrow SCD \Rightarrow$ Se cortan en un punto.

Si $a=-4/3 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rg\,A<3$. $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rg\,A=2$.

$rg\,A^* = rg\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -4/3\\ 1 & 2 & -4/3 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}1 & 1 & -4/3\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rg\,A^*=3$

el sistema es incompatible $\Rightarrow r \parallel \pi$.

b) Si $a\neq -4/3 \Rightarrow d(r,\pi)=0$
Si $a=-4/3 \rightarrow d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \dfrac{|0+0-0-(-4/3)|}{\sqrt{3}} = \dfrac{4/3}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}\ u$
$P_r(0,0,0)$