EXAMEN ANÁLISIS

NOMBRE Y APELLIDOS:____FECHA:_________

1º) Halla el volumen máximo del cono que se obtiene al girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos, sabiendo que la hipotenusa mide 90 cm. (El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$). (1´5p)

2º) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle. Comprueba que las funciones:

$f(x) = x^2 + 2x - 3 \quad y \;\; g(x) = e^{x+1}$ se cortan, al menos, en un punto. (2p)

3º) Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si \;\; x < 2 \\ cx + 1 & si \; x \geq 2 \end{cases}$ determina los valores de los parámetros a,b y c; sabiendo que es continua, derivable y que tiene un extremo relativo en x=1. (1´5p)

4º) Estudia la monotonía y curvatura de la función: $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$. Calcula también los extremos relativos y los puntos de inflexión, si existen. (2p)

5º) Calcula los límites siguientes:

$a)\;\; \lim_{x\to 0} \frac{sen3x}{x - \frac{3}{2}senx}$

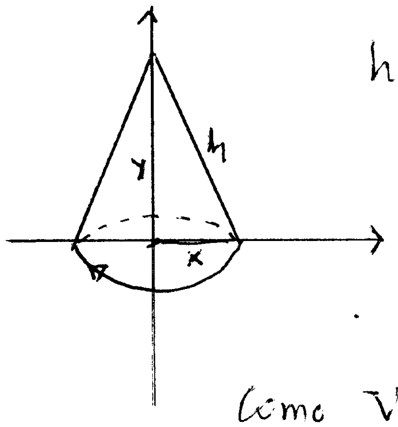
$b)\;\; \lim_{x\to 0} \frac{1-2cosx+cos2x}{x^2}$

$c)\; \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{5x+3}$

$d)\;\; \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{lnx}\right)$

(4 x 0´75p)

1º)



$h = 90$ cm Por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 90^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{8100 - x^2} \text{ ó } x = \sqrt{8100 - y^2}$$

Como $V(x,y) = \pi \cdot x^2 \cdot y = \pi \cdot (8100 - y^2)\, y = 8100\pi y - \pi \cdot y^3$

$$\Rightarrow V(y) = 8100\pi y - \pi y^3 \Rightarrow V'(y) = 8100\pi - 3\pi y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{8100\cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y^2 = 2700 \Rightarrow y = \sqrt{2700}$ (raíz positiva ~~pues~~ son distancias)

$V''(y) = -6y \Rightarrow V''(\sqrt{2700}) < 0 \Rightarrow$ En $y = \sqrt{2700}$ se alcanza el máximo $\Rightarrow V_{máximo} = \pi \cdot (8100 - 2700) \cdot \sqrt{2700} =$

$$x^2 = 8100 - y^2 = 8100 - 2700 = 5400$$

$$V \text{ máximo} = \pi \cdot 5400 \cdot \sqrt{2700} = \pi \cdot 5400 \cdot 30\sqrt{3} = \underline{162000\pi \cdot \sqrt{3}}$$

2º) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y $g(x) = e^{x+1}$ se cortan en un punto si la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene solución. $\Longleftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ tiene solución.

Consideramos $H(x) = f(x) - g(x)$. $H(x) = x^2 + 2x - 3 - e^{x+1}$

$H(-3) = -e^{-2} < 0$
$H(-4) = 5 - e^{-3} > 0$

Si aplicamos el teorema de Bolzano a $H(x)$ en el intervalo $[-4, -3] \Rightarrow$ existe $c \in (-4, -3)$ donde $H(c) = 0 \Longleftrightarrow f(c) = g(c) \Longleftrightarrow f(x)$ y $g(x)$ se cortan en $c = -3'...$

3º) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<2 \\ cx+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Para $x \neq 2$ $f(x)$ es continua y derivable por ser polinomios.

Para que sea continua en $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Longleftrightarrow 2c+1 = 4+2a+b \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2a+b-2c=3 \quad (*)$$

$f'(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } x<2 \\ c & \text{si } x>2 \end{cases}$ Para que sea derivable en $x=2$:

$$f'(2)^+ = f'(2)^- \Longleftrightarrow 4+a=c \quad (**)$$

Como en $x=1$ tiene un extremo relativo: $f'(1)=0 \Longleftrightarrow$

$2+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$. Sustituyo en $(*)$: $\boxed{c=2}$

y sustituyendo en $(*)$: $-4+b-4=1 \Rightarrow \boxed{b=5}$

4º) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2xe^x-(x^2-3)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(2x-x^2+3)}{e^{2x}} \Rightarrow$

$f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{e^x} \Rightarrow f'(x)=0 \Longleftrightarrow -x^2+2x+3=0 \Longleftrightarrow x=3,\ x=-1$

signo $f'(x)$:

$-\infty$ a -1	-1 a 3	3 a ∞
$f'(-2)= -$	$f'(0)=+$	$f'(4)=-$
↘ decrece	↗ crece	↘ decrece

$\Rightarrow$ En $x=-1$ hay un mínimo relativo y en $x=3$ hay un máximo relativo.

$f''(x) = \dfrac{(-2x+2)e^x-(-x^2+2x+3)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(x^2-4x-1)}{e^{2x}} = \dfrac{x^2-4x-1}{e^{2x}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x)=0 \Longleftrightarrow x^2-4x-1=0 \Longleftrightarrow x=2+\sqrt{5},\ x=2-\sqrt{5}$

Signo $f''(x)$:

$-\infty$ a $2-\sqrt{5}$	$2-\sqrt{5}$ a $2+\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$ a ∞
$+$ ∪	$-$ ∩	$+$ ∪

dos puntos son P.I.

5º

a) $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x - \frac{3}{2}\operatorname{sen} x} = \dfrac{0}{0} \xRightarrow{\text{L'Hopital}} L = \lim_{x \to 0} \dfrac{3\cos 3x}{1 - \frac{3}{2}\cos x} = \dfrac{3}{-1/2} = \underline{\underline{-6}}$

b) $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2} = \dfrac{0}{0} \xRightarrow{\text{L'Hop.}} L = \lim_{x \to 0} \dfrac{2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} 2x}{2x} = \dfrac{0}{0}$

Aplicamos de nuevo L'Hôpital: $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{2\cos x - 4\cos 2x}{2} = \dfrac{2-4}{2} = \underline{\underline{-1}}$

c) $L = \lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{5x+3} = 1^{\infty} \Leftrightarrow L = e^{\lim_{x \to \infty} (5x+3)\cdot\left(\frac{3x+2}{3x+1} - 1\right)}$

Calculamos $\lim_{x \to \infty} (5x+3)\left(\dfrac{3x+2}{3x+1} - 1\right) = \lim_{x \to \infty} (5x+3)\cdot\left(\dfrac{3x+2-(3x+1)}{3x+1}\right) =$

$= \lim_{x \to \infty} (5x+3)\cdot\left(\dfrac{1}{3x+1}\right) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{5x+3}{3x+1} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow L = \underline{\underline{e^{5/3}}}$

d) $L = \lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = \infty - \infty \Rightarrow L = \lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} \Rightarrow$

$L = \lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \dfrac{0}{0} \xRightarrow{\text{L'Hôpital}} L = \lim_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Aplicamos L'Hôpital de nuevo: $L = \lim_{x \to 1} \dfrac{-1/x^2}{\frac{1}{x} + \frac{x-(x-1)}{x^2}} =$

$= \lim_{x \to 1} \dfrac{-1/x^2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \underline{\underline{\dfrac{-1}{2}}}$