Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2e^x & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{2}{3+x} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) Determínense el dominio de f (x) y estúdiese su continuidad.

Solución.

a. Para valores menores que cero, la función esta definida por expresiones continuas en R y para valores mayores o iguales que cero esta definida por una expresión continua en R excepto –3, por lo tanto en el intervalo [0, –∞) la expresión $\dfrac{2}{3+x}$ no presenta ningún punto de discontinuidad.

$$D[f(x)]=R$$

El único punto donde se debe estudiar la continuidad es en el punto frontera (x = 0)

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+2e^x\right)=0^3+2e^0=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3+x}=\dfrac{2}{3+0}=\dfrac{2}{3} \end{array}\right\}: \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$$

La función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si} \quad x\leq 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Estúdiese si f (x) es continua en x = 2.

Solución.

a. Para que la función sea continua en x = 2 se debe cumplir:

$$\underbrace{\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)}_{\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)}=f(2)$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{2+2}{2-1}=\dfrac{4}{1}=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x}{x+2}=\dfrac{3\cdot 2^2-2\cdot 2}{2+2}=2 \\ f(2)=\dfrac{2+2}{2-1}=\dfrac{4}{1}=4 \end{array}\right\}: \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$$

En x = 2 la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito

Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2+x-2 & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que f (x) sea una función continua en todo su dominio.

b) Para a = 2, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos.

Solución.

a. Para que una función sea continua en x = –1, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(ax+1)=a\cdot(-1)+1=1-a\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+x-2\right)=(-1)^2+(-1)-2=-2\\ f(-1)=(-1)^2+(-1)-2=-2\end{array}\right\}:1-a=-2\ ;\quad a=3$$

b. $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si} \quad x<-1\\ x^2+x-2 & \text{si} \quad x\geq -1\end{cases}$

- Puntos de corte: f(x) = 2x + 1 en el intervalo (–∞, –1) no corta a los ejes coordenados.

$$f(x)=x^2+x-2=0: x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\begin{cases}=-2\notin[-1,+\infty)\\ =1\in[-1,+\infty)\end{cases}$$

La función corta al eje OX en el punto (1, 0)

Punto de corte con OY: $y=f(0)=0^2+0-2=-2$ (0, –2)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+2} & \text{si} \quad x\leq 0\\ \\ x+2 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f (x) en R.

Solución.

a. La continuidad de una función se estudia en los puntos excluidos del dominio y en los puntos frontera en el caso de funciones por intervalos.

- $D[f(x)]=R-\{-2\}$
- Punto frontera x = 0

Estudio de la continuidad en x = –2:

- $f(-2)=\dfrac{2}{-2+2}=\dfrac{2}{0}\notin R\Rightarrow \nexists$ No existe $f(-2)$

- $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{2}{0}:\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{2}{-2^-+2}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{2}{-2^++2}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}:\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

No existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

En x = –2, la función presenta una discontinuidad no evitable de salto infinito

Estudio de la continuidad en x = 0:

- $f(0)=\dfrac{2}{0+2}=1$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{2}{0+2}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=0+2=2\end{array}\right\}:\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

En x = 0, la función presenta una discontinuidad no evitable de salto finito.

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{ax+b}{x} & \text{si} \quad 1\le x\le 2 \\ \sqrt{x^3+1} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Determínense los valores que deben tomar los parámetros a y b para que f (x) sea continua en x = 1 y x = 2.

b) Calcúlese, para a = 4 y b = −2, el área del recinto acotado por la gráfica de f (x), el eje de abscisas y las rectas x = 1 y x = 2.

Solución.

a. Para que la función sea continua en x = 1 se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+1\right)=1^2+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+b}{x}=\dfrac{a\cdot 1+b}{1}=a+b \\ f(1)=\dfrac{a\cdot 1+b}{1}=a+b \end{array}\right\} : a+b=2$$

Para que la función sea continua en x = 2 se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax+b}{x}=\dfrac{a\cdot 2+b}{2}=\dfrac{2a+b}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^3+1}=\sqrt{2^3+1}=\sqrt{9}=3 \\ f(2)=\dfrac{a\cdot 2+b}{2}=\dfrac{2a+b}{2} \end{array}\right\} : \dfrac{2a+b}{2}=3 : \quad 2a+b=6$$

Las condiciones forman un sistema de de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{cases} : \begin{cases} a=4 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{4x-2}{x} & \text{si} \quad 1\le x\le 2 \\ \sqrt{x^3+1} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+b}{x-2} & \text{si} \quad x\le -1\\ \dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro b la función f (x) es continua en x = −1.

Solución.

a. Para que la función sea continua en x = –1, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$$

- $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}\dfrac{-x+b}{x-2}=\dfrac{1+b}{-3}$
- $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3}\overset{(0/0)}{\underset{\text{Ruffini}}{=}}\lim_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\cdot(x+5)}{(x+1)\cdot(x+3)}\lim_{x\to -1}\dfrac{x+5}{x+3}=\dfrac{4}{2}=2$
- $f(-1)=\dfrac{-(-1)+b}{-1-2}=\dfrac{1+b}{-3}$

Igualando: $\dfrac{1+b}{-3}=2;\quad b=-7$

Considérese la función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases}e^x & \text{si} \quad x<0\\ \dfrac{x^3}{(x-2)^2}+1 & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de esta función.

b) Determínense las asíntotas de esta función.

Solución.

a. Por tratarse de una función por intervalos, la continuidad se estudia en los puntos excluidos del dominio y en los puntos frontera.

Dominio: $D[f(x)]=R-\{2\}$

$$f(2)=\frac{2^3}{(2-2)^2}+1=\frac{8}{0}+1\notin R\Rightarrow f(2)\,\text{no existe}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)\overset{\frac{k}{0}}{=}\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x^3}{(x-2)^2}+1\right)=\dfrac{2^3}{\left(2^- -2\right)^2}+1=\dfrac{8}{\left(0^-\right)^2}+1=\dfrac{8}{0^+}+1=\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^3}{(x-2)^2}+1\right)=\dfrac{2^3}{\left(2^+ -2\right)^2}+1=\dfrac{8}{\left(0^+\right)^2}+1=\dfrac{8}{0^+}+1=\infty\end{array}\right\}=\infty\notin R\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

En x = 2 la función tiene una discontinuidad no evitable de salto infinito

Punto frontera x = 0:

Para que la función sea continua se debe cumplir que $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname*{Lím}\limits_{x\to 0^-} f(x)=\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 \\ \operatorname*{Lím}\limits_{x\to 0^+} f(x) = \operatorname*{Lím}\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{(x-2)^2}+1\right) = \frac{0^3}{(0-2)^2}+1=0+1=1 \\ f(0)=\frac{0^3}{(0-2)^2}+1=0+1=1\end{array}\right\}: \operatorname*{Lím}\limits_{x\to0^-}f(x)=\operatorname*{Lím}\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=0$$

En x = 0 la función es continua.

b. Asíntotas verticales: son rectas de la forma x = a tal que $a \notin$ Dominio y $\operatorname*{Lím}\limits_{x\to a} f(x)=\frac{k}{0}$

$$\operatorname*{Lím}\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^3}{(x-2)^2}+1\right)=\frac{2^3}{(2-2)^2}+1=\frac{8}{0}+1=\frac{8}{0} \Rightarrow x = 2 \text{ asíntota vertical}$$

Asíntota horizontal: son rectas de la forma y = L, donde $L = \operatorname*{Lím}\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \in R$

$$\operatorname*{Lím}\limits_{x\to-\infty} f(x)=\operatorname*{Lím}\limits_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0 \text{ Asíntota horizontal hacia } -\infty \text{ en } x = 0$$

$$\operatorname*{Lím}\limits_{x\to+\infty} f(x)=\operatorname*{Lím}\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x-2)^2}+1\right)=\operatorname*{Lím}\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-4x+4}{x^2-4x+4}\underset{\div x^3}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\operatorname*{Lím}\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{\infty}-\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}=\frac{1+0-0+0}{0-0+0}=\frac{1}{0}=\infty \quad \text{No hay asíntota horizontal hacia } -\infty$$

Asíntota oblicua. Son rectas de la forma y = mx + n, donde:

$$m = \operatorname*{Lím}\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad n = \operatorname*{Lím}\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$$

La función solo puede tener asíntota oblicua hacia +∞ ya que hacia –∞ tiene asíntota horizontal.

$$m = \operatorname*{Lím}\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{(x-2)^2}+1}{x}=\operatorname*{Lím}\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3+x^2-4x+4}{x^2-4x+4}}{x}=\operatorname*{Lím}\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2-4x+4}{x^3-4x^2+4x}\underset{\div x^3}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}$$

$$=\operatorname*{Lím}\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{1+\frac{1}{-\infty}-\frac{4}{(-\infty)^2}+\frac{4}{(-\infty)^3}}{1+\frac{1}{(-\infty)}-\frac{4}{(-\infty)^2}}=\frac{1+0-0+0}{1+0-0}=1$$

$$n = \operatorname*{Lím}\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x^2-4x+4}{x^2-4x+4}-1x\right)=\operatorname*{Lím}\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-8x+4}{x^2-4x+4}\underset{\div x^2}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\approx}}\frac{5}{1}=5$$

Hacia +∞ la función tiene una asíntota oblicua de ecuación y = x +5

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{si} \quad x<2\\[2ex] 3x+m & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función f sea continua en x = 2.

b) Calcúlense $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Solución.

a. Para que la función sea continua en x = 2, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$$

- $$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\underset{\text{RUFFINI}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{2+2}{2-3}=-4$$

- $$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}(3x+m)=3\cdot 2+m=6+m$$

- $$f(2)=3\cdot 2+m=6+m$$

Igualando: $-4=6+m \;\Rightarrow\; m=-10$

b. $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\approx}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(3x+m)=3\cdot\infty+m=\infty$$

Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\begin{cases}x+a & \text{si} \quad x<1\\ x^2-2 & \text{si} \quad 1\le x\le 3\\ x+b & \text{si} \quad x>3\end{cases}$

a) Determínense a y b para que f sea continua en todo R.

Solución.

a. La función está definida por expresiones polinómicas, las cuales son continuas en sus dominios de definición, por lo tanto para que la función sea continua, deberá ser continua en los puntos frontera.

x = 1. Para que la función sea continua en x = 1, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+a)=1+a\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-2\right)=1^2-2=-1\\ f(1)=1^2-2=-1\end{array}\right\}:1+a=-1 \qquad a=-2$$

x = 3. Para que la función sea continua en x = 3, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-2\right) = 3^2-2=7 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x+b) = 3+b \\ f(3) = 3^2-2=7 \end{array}\right\} : 3+b=7 \qquad b=4$$

Sea $f(x)=\begin{cases} 2x^2-ax+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+3x-b & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

a) Determínense los valores de a y b que hacen que f sea continua en x = 1 y que $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Solución.

a. Para que la función sea continua en x = 1, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-ax+1\right) = 2\cdot 1^2 - a\cdot 1 + 1 = 3-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(-x^2+3x-b\right) = -1^2+3\cdot 1 - b = 2-b \\ f(1) == 2\cdot 1^2 - a\cdot 1 + 1 = 3-a \end{array}\right\} : 3-a=2-b \Rightarrow a-b=1$$

Además, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4} \Rightarrow -\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-b=\frac{1}{4}$; $\frac{9}{4}-b=\frac{1}{4}$; $b=2$

Sustituyendo en la primera condición: $a-2=1$; $a=3$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-3 & \text{si} \quad x\le 1 \\ \mathrm{Ln}(2x-1) & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Calcúlese a para que la función f sea continua en todo R.

Nota: Ln x denota al logaritmo neperiano del número x.

Solución.

a. La función esta definida por expresiones continuas en sus intervalos, por lo tanto para que sea continua deberá ser continua en el punto frontera, x = 1.

Para que sea continua en x = 1, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

Definición que se puede ampliar teniendo en cuenta que para que exista límite de una función en un punto, deben existir sus límites laterales en el punto y ser iguales.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(ax^2-3\right) = a\cdot 1^2 - 3 = a-3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \mathrm{Ln}(2x-1) = \mathrm{Ln}(2\cdot 1 - 1) = \mathrm{Ln}\,1 = 0$$

$$f(1) = a\cdot 1^2 - 3 = a-3$$

Igualando:

$$a-3=0 \quad ; \quad a=3$$

Se considera la función real de variable real $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{a+3x}{x^2-4x+3} & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$

a) Estúdiese la continuidad de f en x = 0 para los distintos valores del parámetro a.

Solución.

a. Para que la función sea continua en x = 0, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{a+3x}{x^2-4x+3}=\dfrac{a+3\cdot 0}{0^2-4\cdot 0+3}=\dfrac{a}{3} \\ f(0)=\dfrac{a+3\cdot 0}{0^2-4\cdot 0+3}=\dfrac{a}{3} \end{array}\right\}:1=\frac{a}{3}\Rightarrow a=3$$

Discusión:

i. Si a = 3. Continua en x = 0

ii. Si a ≠ 3. Los límites laterales no coinciden en x = 0, por lo tanto la función no tiene límite en el punto. Discontinua no evitable de salto finito.

Dada la función real de variable real $f(x)=\begin{cases} -x^2-3x-5 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

a) Estúdiese la continuidad de la función en R.

Solución.

a. La función f(x) esta definida mediante expresiones polinómicas, que son continuas en su domino de definición, por lo tanto, la continuidad de la función dependerá de la continuidad en el punto frontera (x = 1).

Para que la función sea continua en x = 1 se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(x)$$

Se calcula cada miembro de la igualdad por separado y se comprueba:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-x^2-3x-5\right)=-1^2-3\cdot 1-5=-9 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x^2=1^2=1 \\ f(x)=-1^2-3\cdot 1-5=-9 \end{array}\right\}: \lim_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

En x = 1, la función tiene una discontinuidad no evitable de salto finito,

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+4x-3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

(a) Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de la función f.

Solución.

a. La función está definida mediante expresiones continuas en sus dominios de definición, por lo tanto solo es necesario estudiar su continuidad y derivabilidad en x = 1.

Para que la función sea continua en x = 1 se debe cumplir:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^2-4\cdot 1+3=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-4x+3\right)=1^2-4\cdot 1+3=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^2+4x-3\right)=-1^2+4\cdot 1-3=0 \end{array}\right\} : \text{Se cumple la condición de continuidad}$$

La función es continua en x = 1.

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ ax^2+bx+c & \text{si} \quad 0\le x\le 3 \\ 3-x & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

b) Para a = 0, calcúlese b, c, para que la función f sea continua en todos los puntos

Solución.

b. $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ bx+c & \text{si} \quad 0\le x\le 3 \\ 3-x & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

Para que la función sea continua en R, debe ser continua en 0 y en 3, que son los puntos frontera.

- Para que la función sea continua en x = 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+2)=2\cdot 0+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(bx+c)=b\cdot 0+c=c \\ f(0)=b\cdot 0+c=c \end{array}\right\}: c=2$$

- Para que la función sea continua en x = 3:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(bx+c)=b\cdot 3+c=3b+c \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(3-x)=3-3=0 \\ f(3)=b\cdot 3+c=3b+c \end{array}\right\}: 3b+c=0$$

Sustituyendo el valor de c en la segunda igualdad se obtiene b.

$$3b+2=0 \;;\; b=-\frac{2}{3}$$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0\le x\le 3 \\ x-5 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

a) Calcúlense *a* y b para que la función *f* sea continua en todos los puntos.

Solución.

a. La función está definida por expresiones polinómicas, las cuales son continuas en sus dominios de definición, para que la función sea continua deberá ser continua en los puntos frontera (x = 0 y en x = 3).

En x = 0: Para que la función sea continua se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

Para que exista límite cuando x tiende a cero, deben existir los límites laterales en 0 y ser iguales, por lo que la condición de continuidad la podemos cambiar por:

$$\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\ f(x) = \underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\ f(x) = f(0)$$

Teniendo en cuenta la definición de la función en cero y en su entorno:

$$\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\left(x^2+1\right) = \underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\,(ax+b) = a\cdot 0 + b \quad \text{Resolviendo: } 1 = b$$

Repitiendo los mismos conceptos en x = 3:

$$\underset{x\to 3^-}{\text{Lím}}\ f(x) = \underset{x\to 3^+}{\text{Lím}}\ f(x) = f(3)$$

Teniendo en cuenta la definición de la función en cero y entorno a cero:

$$\underset{x\to 3^-}{\text{Lím}}\,(ax+b) = \underset{x\to 3^+}{\text{Lím}}\,(x-5) = a\cdot 3 + b \quad \text{Resolviendo: } 3a+b=-2$$

Las dos condiciones permiten plantear un sistema cuya solución son los valores de a y b.

$$\begin{cases} b=1 \\ 3a+b=-2 \end{cases} : \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<0 \\ -x+1 & \text{si} \quad 0\le x\le 3 \\ x-5 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2-a & \text{si} \quad x\le -1 \\ -3x^2+b & \text{si} \quad -1<x<1 \\ \log x + a & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense a, b, para que la función f sea continua en todos los puntos.

Nota.– La notación log representa al logaritmo neperiano

Solución.

a. La función está definida por expresiones polinómicas, continuas en sus dominios de definición. Para que la función sea continua, deberá ser continua en los puntos frontera.

En $x=-1$

$$f(-1) = \underset{x\to -1}{\text{Lím}}\ f(x)$$

Por definición de límite:

$$f(-1) = \underset{x\to -1^-}{\text{Lím}}\ f(x) = \underset{x\to -1^+}{\text{Lím}}\ f(x)$$

Se calculan los términos de la igualdad por separado.

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^2 - a = 2-a$$

$$\underset{x\to -1^-}{\text{Lím}}\ f(x) = \underset{x\to -1^-}{\text{Lím}}\left(2x^2-a\right) = 2\cdot(-1)^2 - a = 2-a$$

$$\underset{x\to -1^+}{\text{Lím}}\ f(x) = \underset{x\to -1^+}{\text{Lím}}\left(-3x^2+b\right) = -3\cdot(-1)^2 + b = -3+b$$

Para que la función sea continua en $x=-1$ se debe cumplir:

$$2-a=-3+b \ : \ a+b=5$$

En x = 1:

$$f(1) = \underset{x\to 1}{\text{Lím}}\, f(x)$$

Por definición de límite:

$$f(1) = \underset{x\to 1^-}{\text{Lím}}\ f(x) = \underset{x\to 1^+}{\text{Lím}}\ f(x)$$

Se calculan los términos de la igualdad por separado.

$$f(1) = \log 1 + a = 0 + a = a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(-3x^2 + b\right) = -3\cdot 1^2 + b = -3 + b$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(\log x + a) = \log 1 + a = 0 + a = a$$

Para que la función sea continua en x = 1 se debe cumplir:

$$a = -3 + b \ : \ \ a - b = -3$$

Las condiciones de continuidad en x = −1 y en x = 1 permiten plantear un sistema de ecuaciones con el que calcular los valores de a y b.

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = -3 \end{cases} : a = 1 \ ; \ \ b = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si} & x \le -1 \\ -3x^2 + 4 & \text{si} & -1 < x < 1 \\ \log x + 1 & \text{si} & x \ge 1 \end{cases}$$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{Si} & x < 2 \\ x + a & \text{Si} & 2 \le x \le 5 \\ -x^2 + 5x + b & \text{Si} & x > 5 \end{cases} \quad (a, b \in \Re)$$

a) Calcúlense los valores de a y b para que f sea continua en x = 2 y en x = 5.

Solución.

a. Para que una función sea continua en un punto x_o se debe cumplir que el valor de la función en el punto coincida con el límite de la función en el punto.

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$$

La función f(x) está definida por expresiones polinómicas, continuas por definición, por lo tanto para que la función sea continua deberá ser continua en los puntos frontera (x = 2, x = 5).

En x = 2: $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$2 + a = \lim_{x\to 2^-} x^2 = \lim_{x\to 2^+}(x + a)$$

$$2^2 = 2 + a \Rightarrow a = 2$$

En x = 5: $f(5) = \lim_{x\to 5} f(x) \Rightarrow f(5) = \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x)$

$$5 + a = \lim_{x\to 5^-}(x + a) = \lim_{x\to 5^+}\left(-x^2 + 5x + b\right)$$

$$5 + a = -5^2 + 5\cdot 5 + b \Rightarrow a - b = -5$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ a - b = -5 \end{cases} : b = 7$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{Si} & x < 2 \\ x + 2 & \text{Si} & 2 \le x \le 5 \\ -x^2 + 5x + 7 & \text{Si} & x > 5 \end{cases}$$

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$$

(a) Especificar su dominio de definición.

(b) Estudiar su continuidad

Solución.

a. El dominio de las funciones irracionales son todos los números reales excepto los que anulen el denominador.

$$D=\{x\in R\,/\,x^2-3x+2\neq 0\};\ x^2-3x+2=0:\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}$$

$$D[f(x)]=R-\{1,2\}$$

b. La continuidad de las funciones racionales (cocientes de polinomios), se estudia en los puntos excluidos del dominio, en los demás, la función es continua.

Para que una función sea continua en un punto a, se debe cumplir:

$$\underset{x\to a}{\text{Lím}}\, f(x)=f(a)$$

El estudio se realiza por pasos:

a. 1º Se calcula el valor de f (a).

b. 2º Se calcula el valor de $\underset{x\to a}{\text{Lím}}\, f(x)$

c. Se comprueba si se cumple: $\underset{x\to a}{\text{Lím}}\, f(x)=f(a)$

x = 1

$$1^{\text{o}}\ f(1)=\frac{1^2-1}{1^2-3\cdot 1+2}=\frac{0}{0}\notin R\Rightarrow \text{No}\ \exists f(1)$$

$$2^{\text{o}}\ \underset{x\to 1}{\text{Lím}}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}\underset{\text{RUFFINI}}{\overset{(0/0)}{=}}\underset{x\to 1}{\text{Lím}}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\underset{x\to 1}{\text{Lím}}\frac{x}{x-2}=\frac{1}{1-2}=-1$$

En x = 1 la función no existe pero si existe límite (−1), la función tiene una discontinuidad evitable.

x = 2

$$1^{\text{o}}\ f(2)=\frac{2^2-2}{2^2-3\cdot 2+2}=\frac{2}{0}\notin R\Rightarrow \text{No}\ \exists f(2)$$

$$2^{\text{o}}\ \underset{x\to 2}{\text{Lím}}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}\overset{(k/0)}{=}\begin{cases}\underset{x\to 2^-}{\text{Lím}}\dfrac{x^2-x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{2^2-2}{(2-1)(2^--2)}=\dfrac{2}{1\cdot 0^-}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\\[2ex]\underset{x\to 2^-}{\text{Lím}}\dfrac{x^2-x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{2^2-2}{(2-1)(2^+-2)}=\dfrac{2}{1\cdot 0^+}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

$$\underset{x\to 2^-}{\text{Lím}}\frac{x^2-x}{(x-1)(x-2)}\neq\underset{x\to 2^-}{\text{Lím}}\frac{x^2-x}{(x-1)(x-2)}\Rightarrow \text{No}\ \exists\,\underset{x\to 2}{\text{Lím}}\frac{x^2-x}{(x-1)(x-2)}$$

En x = 2 no existe función ni límite, la función presenta una discontinuidad no evitable de salto infinito (asíntota vertical).

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ \text{In}(x) & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f(x) en x = 1.

Solución.

Para que una función sea continua en un punto $x = a$ se debe cumplir:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(x)=f(a)$$

En x = 1

$$f(1)=2\cdot 1^2-3\cdot 1+1=0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x):\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(2x^2-3x+1\right)=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(\text{lu } x)=\text{lu } 1=0 \end{array}\right\}:\lim_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$$

La función es continua en x = 1

Sea la función $f(x)=\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$

Se pide:

a) Especificar su dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad.

Solución.

a. El dominio de una función racional son todos los números reales excepto los que anulan el denominador de la expresión.

$$D\left(\frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}\right)=\left\{x\in\Re \,/\, 2x^2+2x-12\ne 0\right\}=\left\{2x^2+2x-12=0:\left\{\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right\}\right.=\Re-\{-3,2\}$$

b. Por ser una función racional, es continua en todo R excepto en los valores que anulan el denominador, x = −3 y x = 2. En estos puntos la función es discontinua por que no existe.

$$f(-3)=\frac{28}{0}\notin\Re$$

$$f(2)=\frac{-7}{0}\notin\Re$$

Para estudiar el tipo de discontinuidad en estos puntos, se estudian los límites en ellos. El estudio de estos tipos de límites se hace más sencillo si el denominador se expresa factorizado.

$$2x^2 + 2x - 12 = 2\,(x + 3)\,(x - 2)$$

Para x = −3

$$\text{Lím}_{x\to -3}\frac{-x^3+1}{2(x+3)(x-2)}=\left\{\begin{array}{l} \text{Lím}_{x\to -3^-}\dfrac{-x^3+1}{2(x+3)(x-2)}=\dfrac{28}{2\left(-3^-+3\right)(-3-2)}=\dfrac{28}{2\cdot 0^-\cdot(-6)}=\dfrac{28}{0^+}=+\infty \\ \text{Lím}_{x\to -3^+}\dfrac{-x^3+1}{2(x+3)(x-2)}=\dfrac{28}{2\left(-3^++3\right)(-3-2)}=\dfrac{28}{2\cdot 0^+\cdot(-6)}=\dfrac{28}{0^-}=-\infty \end{array}\right.$$

como los límites laterales en −3 no coinciden, no existe límite cuando x tiende a −3. La función presenta una discontinuidad no evitable de salto infinito.

Para x = 2

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^3+1}{2(x+3)(x-2)}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x^3+1}{2(x+3)(x-2)}=\dfrac{-7}{2(2+3)\left(2^- -2\right)}=\dfrac{-7}{2\cdot 5\cdot 0^-}=\dfrac{-7}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x^3+1}{2(x+3)(x-2)}=\dfrac{-7}{2(2+3)\left(2^+ -2\right)}=\dfrac{-7}{2\cdot 5\cdot 0^+}=\dfrac{-7}{0^+}=\dfrac{28}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

como los límites laterales en 2 no coinciden, no existe límite cuando x tiende a 2. La función presenta una discontinuidad no evitable de salto infinito.

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & \text{Si } x\le 2\\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{Si } x>2\end{cases}$

(a) Estúdiese si f (x) es continua en el punto x = 2

Solución:

a. La condición necesaria y suficiente para que la función sea continua en un punto x = 2 es:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

Esta condición se puede desdoblar en 3 pasos:

i. $f(2)=\dfrac{2+2}{2-1}=4\ \in\ \mathfrak{R}\ \Rightarrow\ \exists\ f(2)$

ii. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x}{x+2}=2\end{cases}\Rightarrow \text{no}\ \exists\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. En este caso, no tiene sentido al no existir el límite

La función es discontinua en x = 2, presentando una discontinuidad no evitable de salto finito.