GEOMETRÍA ANALÍTICA

1.- a) Expresa en forma paramétrica y continua la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta s de ecuación s: $5x - 2y + 12 = 0$ y pasa por el punto B: $(-2, 5)$.

b) Halla la ecuación implícita de una recta paralela a r: $\begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$, que pasa por el punto M(1,-2)

2.- Los puntos A(0, −2), B(1, 1), C(5, 2) y D(4, −1) son los vértices de un cuadrilátero. Obtén las ecuaciones de sus diagonales y su longitud. Indica de qué tipo de cuadrilátero se trata.(en caso de ser paralelogramo, de cuál se trata).

3.- Los vértices de un triángulo son A(4,4),B(1,-1) y C(6,2).

a) Demuestra que el triángulo ABC es isósceles.

b) Calcula su área.

4.- Los puntos A(1,5) y B(6,0) son los vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C está en la bisectriz del cuarto cuadrante. Halla los vértices C y D.

5.- Un triángulo rectángulo en A tiene dos vértices en los puntos A(1,3) y B(3,0). El otro vértice está situado sobre la recta $y – 1 = 0$. Halla las coordenadas del tercer vértice.

6.- Calcula las coordenadas de D para que el cuadrilátero de vértices: A(-1, -2), B(4, -1), C(5, 2) y D; sea un paralelogramo.

7.- Determinar la ecuación de la recta s que pasando por A(5,-2) forme 45º con la recta r : $3x + 7y – 12 = 0$

8.- Determina la recta paralela a r que pasa por el punto simétrico de P respecto de la recta r.

r: $2x - 3y + 10 = 0$ P(4, −7)

9. a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1) y forma un ángulo de 120º con la parte positiva del eje x.

b) ¿Qué ángulo forma la recta $x + y + 5 = 0$ con OX^+?

10.- Dibujar en unos ejes cartesianos el triángulo de vértices A(2,0), B(0,1) y C(-3,-2), y hallar:

a) La ecuación de la altura correspondiente al lado AC.

b) La ecuación de la mediatriz correspondiente a AB.

Todos los procesos que conducen a resultados deben estar suficientemente justificados.

- Serán evaluados negativamente los errores de cálculo operacional básico así como aquellos que denoten errores conceptuales.
- Se valorará positivamente la exposición clara del proceso seguido utilizando el lenguaje formal propio de las Matemáticas.
- Los errores debidos a despistes no se tendrán en cuenta en la calificación, excepto si son reiterados o contradicen resultados teóricos básicos.

SOLUCIÓN GEOMETRÍA ANALÍTICA

1.- a) Expresa en forma paramétrica y continua la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta s de ecuación s: 5x − 2y + 12 = 0 y pasa por el punto B: (−2, 5).

b) Halla la ecuación implícita de una recta paralela a r: $\begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$, que pasa por el punto M(1,-2)

a) Vector director de s: $\vec{u}_s = (2,5) \rightarrow \vec{u} \perp \vec{u}_s \rightarrow \vec{u} = (5,-2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-5}{-2}$

b) Llamamos s a la recta paralela a r que pasa por M.

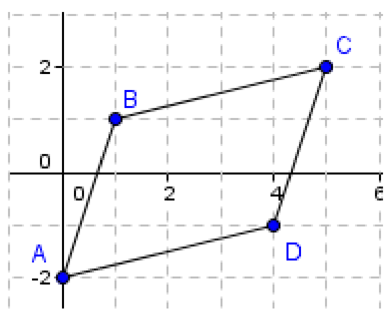
Al ser las dos rectas paralelas sus vectores directores son proporcionales.

El vector director de r es $\vec{u}$ (-2,3), por tanto, podemos considerar como vector director de s $\vec{v}$ (-2,3)

Por tanto, s es la recta que pasa por M y tiene como vector director $\vec{v}$. Su ecuación continua es:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{3} \rightarrow 3x - 3 = -2y - 4 \rightarrow 3x + 2y + 1 = 0$$

2. Los puntos A(0, −2), B(1, 1), C(5, 2) y D(4, −1) son los vértices de un cuadrilátero. Obtén las ecuaciones de sus diagonales y su longitud. Indica de qué tipo de cuadrilátero se trata.



- Ecuaciones de las diagonales:

  Determinamos los vectores de dirección:

  $\overrightarrow{AC} = (5, 4) \rightarrow$ AC: $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y+2}{4}$ **;** $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

  $\overrightarrow{BD} = (3, -2) \rightarrow$ BD: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-2}$; $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

- Longitudes de las diagonales:

  $\overrightarrow{AC} = (5, 4) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

  $\overrightarrow{BD} = (3, -2) \rightarrow |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

- Estudiamos el paralelismo de los lados para determinar el tipo de cuadrilátero:

  $\overrightarrow{AB} = (1, 3)$; $\overrightarrow{BC} = (4, 1)$; $\overrightarrow{CD} = (-1, -3)$; $\overrightarrow{DA} = (4, 1)$

  Los lados son paralelos 2 a 2 $\rightarrow$ El cuadrilátero es un paralelogramo.

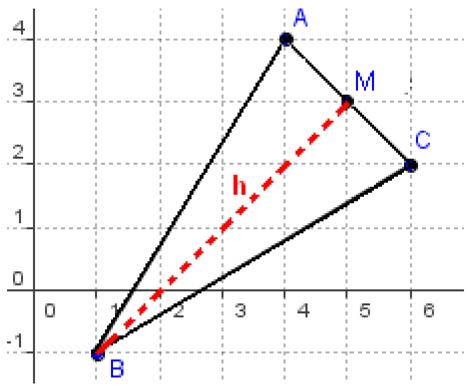
  Las diagonales tienen distinta longitud $\rightarrow$ Es un romboide o un rombo.

  Las diagonales no son perpendiculares ya que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 15 - 8 \neq 0 \rightarrow$ Es un romboide

3. Los vértices de un triángulo son A(4,4),B(1,-1) y C(6,2).

a) Demuestra que el triángulo ABC es isósceles.

b) Calcula su área.



a) Demostremos que los lados AB y BC son iguales

$\overrightarrow{BC} = (5,3) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$

$\overrightarrow{AB} = (-3,-5) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$

b) El área es:

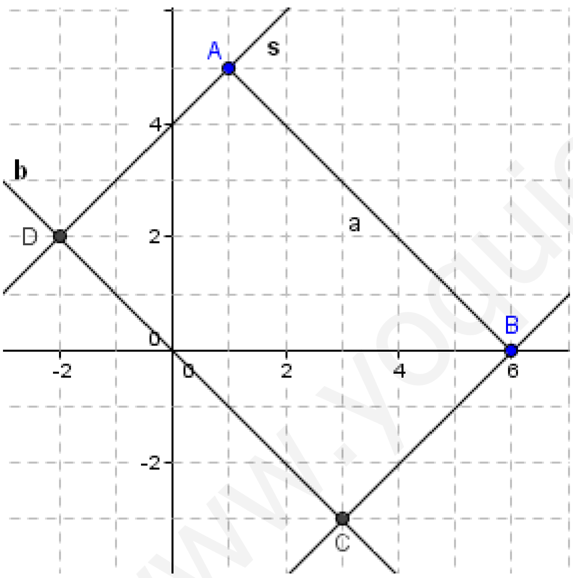
$A = \dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BM}| = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} = 8\ u^2$

$\overrightarrow{AC}$ = (2, -2) $\rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$

M punto medio del segmento $\overline{AC}$: M = (5, 3)

$\overrightarrow{BM} = (4,4)$ = $|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$

4. Los puntos A(1,5) y B(6,0) son los vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C está en la bisectriz del cuarto cuadrante. Halla los vértices C y D.



La ecuación de la bisectriz del cuarto cuadrante es:

b: x + y = 0

El punto C es un punto de la bisectriz b, por tanto sus coordenadas son de la forma C = (x, -x)

Al ser un rectángulo, se verifica que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \rightarrow$ (5,-5) · (x – 6, -x) = 0

5x – 30 + 5x = 0 $\rightarrow$ x = 3 $\rightarrow$ C = (3, -3)

Una segunda forma de calcular el punto:

El punto C es la intersección de la recta s y la bisectriz b,

siendo s la recta perpendicular a AB que pasa por A

- Ecuación de la recta s: $\overrightarrow{AB}$ = (5, -5) $\rightarrow \vec{u}_s = (1,1) \perp \overrightarrow{AB}$

  Como s pasa por B: x – 6 = y $\rightarrow$ x – y – 6 = 0.

- Coordenadas del punto C = $s \cap b$:

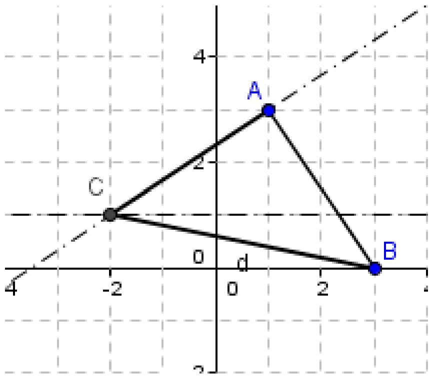
  Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas:

$$\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3,\ y = -3 \rightarrow C = (3,-3)$$

Por ser ABCD un rectángulo, se verifica: $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{DC}$

Si D = (x,y) $\rightarrow$ (5, -5) = (3 – x, -3 – y) $\rightarrow \begin{cases} 5 = 3 - x \\ -5 = -3 - y \end{cases} \rightarrow$ x = -2 , y = 2 $\rightarrow$ D = (-2, 2)

5. Un triángulo rectángulo en A tiene dos vértices en los puntos A(1,3) y B(3,0). El otro vértice está situado sobre la recta y – 1 = 0. Halla las coordenadas del tercer vértice.



El vértice C es un punto de la recta y – 1 = 0, por tanto, su segunda coordenada vale 1.

Supongamos que las coordenadas de C son (x, 1)

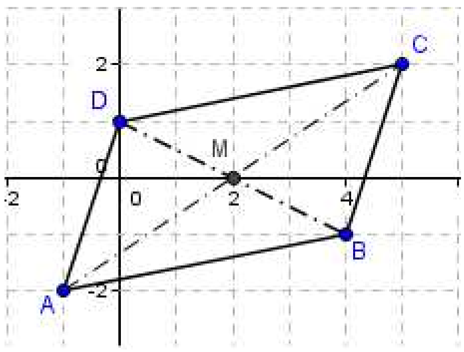
Si el triángulo es rectángulo en A, se verifica que $\overline{AC}\cdot\overline{AB}=0$

$\overrightarrow{AC}=(x-1,-2)$ $\overrightarrow{AB}=(2,-3)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \rightarrow 2(x-1)+6=0 \rightarrow 2x+4=0 \rightarrow x=-2$

Luego el punto C tiene coordenadas (-2,1)

6.- Calcula las coordenadas de D para que el cuadrilátero de vértices: A(-1, -2), B(4, -1), C(5, 2) y D; sea un paralelogramo.



Sea D = (x,y)

Por ser un paralelogramo se verifica que las diagonales se cortan en el punto medio:

Sea M el punto medio del segmento $\overline{AC}$: M = (2, 0)

M es el punto medio del segmento $\overline{DB}$:

$$(2,0)=\left(\frac{x+4}{2},\frac{y-1}{2}\right)\rightarrow\begin{cases}2=\dfrac{x+4}{2}\rightarrow x=0\\0=\dfrac{y-1}{2}\rightarrow y=1\end{cases}$$

Por tanto, D = (0,1)

7.- Determinar la ecuación de la recta s que pasando por A(5,-2) forme un ángulo de 45º con la recta r : 3x + 7y – 12 = 0

Vectores directores de las rectas: $\vec{u}_r=(7,-3)$ $\vec{u}_s=(1,m)$

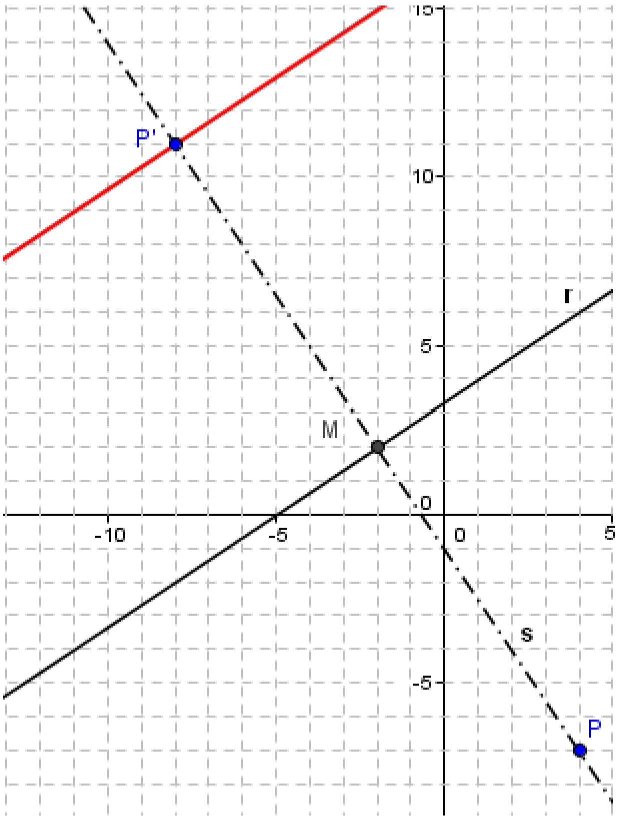
$$\cos 45^\circ=\frac{|\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}=\frac{|7-3m|}{\sqrt{7^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+m^2}}=\frac{|7-3m|}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{1+m^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow \cancel{2}\cdot|7-3m|=\cancel{2}\sqrt{29}\cdot\sqrt{1+m^2}$$

$$9m^2-42m+49=29+29m^2 \xrightarrow{:2} 10m^2+21m-10=0\rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{2}{5}\\m=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$$\text{Ecuaciones de las rectas: }\begin{cases}\text{Si } m=\dfrac{2}{5}\rightarrow s: y+2=\dfrac{2}{5}(x-5)\\\text{Si } m=-\dfrac{5}{2}\rightarrow s: y+2=-\dfrac{5}{2}(x-5)\end{cases}$$

8.- Determina la recta paralela a r que pasa por el punto simétrico de P respecto de la recta r.

r: 2x − 3y + 10 = 0   P(4, −7)



Calculamos el punto P´ simétrico de P respecto de r:

1.- Recta s perpendicular a r que pasa por P:

Vector director de r: $\vec{u}_r = (3, 2)$

Vector perpendicular: (2, -3)

Recta s: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 - 3t \end{cases}$

2.- Sea M: Punto medio del segmento $\overline{PP'}$

El punto M es el punto de intersección de las rectas r y s.

$2\,(4 + 2t) - 3\,(-7 - 3t) + 10 = 0 \rightarrow 13t + 39 = 0$

t = -3

Sustituyendo en s, obtenemos las coordenadas:

M = (–2, 2)

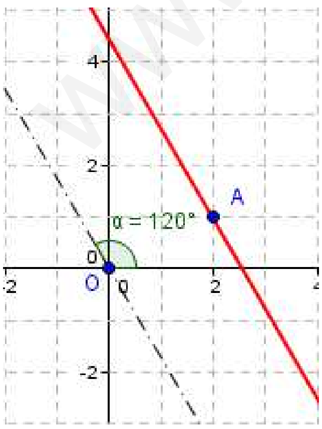
3.- Coordenadas de P´(x, y):

$$(-2,2) = \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y-7}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -2 = \dfrac{x+4}{2} \rightarrow x = -8 \\ 2 = \dfrac{y-7}{2} \rightarrow y = 11 \end{cases}$$

Por tanto, el simétrico de P respecto de r es P´(-8, 11)

4.- Recta paralela a r que pasa por P´(-8, 11) : $\dfrac{x+8}{3} = \dfrac{y-11}{2}$

9. a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1) y forma un ángulo de 120º con la parte positiva del eje x.



Vectores directores de la recta: OX: $\vec{u}_r = (1, 0)$

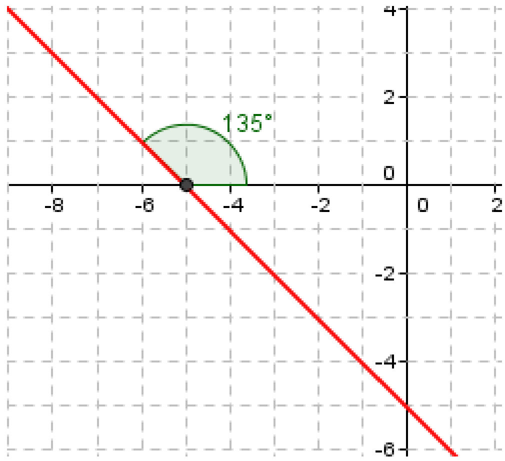
Vector director de la recta buscada: $\vec{u}_s = (1, m)$

$$\cos 120^o = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{1+m^2}} = -\frac{1}{2} \rightarrow -2 = \sqrt{1+m^2} \rightarrow 4 = 1 + m^2$$

$m = -\sqrt{3}$ (ya que el ángulo es obtuso)

Ecuación de la recta: $y - 1 = -\sqrt{3}\,(x + 2)$

b) ¿Qué ángulo forma la recta x + y + 5 = 0 con OX^+?



Vector director de la recta m: x + y + 5 = 0:

$\vec{u}_m = (1,-1)$

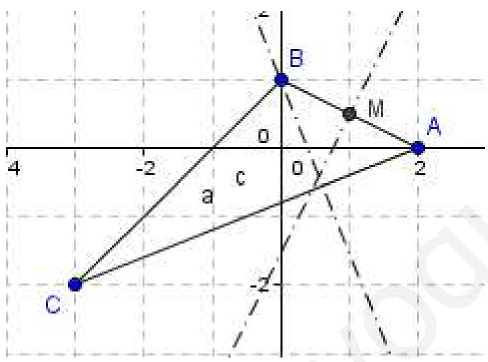
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_m|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_m|} = \frac{|1|}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Al pedir el ángulo que forma la recta que pasa por el 2º y 4º cuadrante con el eje OX positivo, el ángulo es 135º.

10.- Dibujar en unos ejes cartesianos el triángulo de vértices A(2,0), B(0,1) y C(-3,-2), y hallar:

a) La ecuación de la altura correspondiente al lado AC.

b) La ecuación de la mediatriz correspondiente a AB.



a) Hay que determinar la recta r $\perp$ AC, que pasa por B:

$\overrightarrow{AC} = (-5,-2) \rightarrow \vec{u}_r = (2,-5)$

Ecuación de la altura: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-5}$

b) Hay que determinar la recta s $\perp$ AB, que pasa por M:

M = punto medio del segmento AB: M = $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

$\vec{u}_s \perp \overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (-2,1) \rightarrow \vec{u}_s = (1,2)$

Ecuación de la mediatriz: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = \frac{1}{2}+2t \end{cases}$