VECTORES

❖ Definición de vector:

Un ***vector*** es un segmento orientado que queda determinado por dos puntos, A y B, el primero de los puntos se denomina ***origen*** y el segundo es el ***extremo***, y se designa por $\overrightarrow{AB}$.

- El conjunto de vectores fijos de un plano recibe el nombre de ***plano vectorial*** y se designa por V_2

❖ Elementos de un vector

Un vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ queda determinado por su módulo, dirección y sentido:

2. ***Módulo del vector*** $\vec{u}$, como la longitud del vector $\overrightarrow{AB}$, o bien, la distancia entre los puntos A y B. Se designa por $|\overrightarrow{AB}|$.
3. ***Dirección del vector*** $\vec{u}$, como la dirección de la recta que contiene a los puntos A y B.
4. ***Sentido del vector*** $\vec{u}$, como el recorrido de la recta cuando nos desplazamos de A a B.

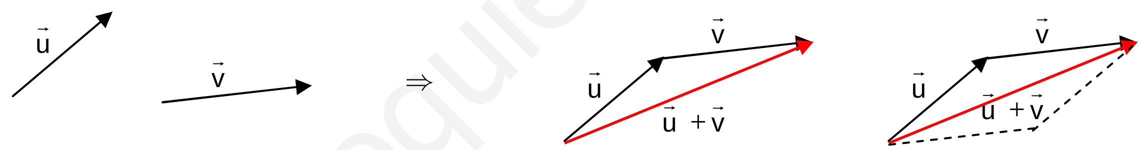
- Dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen la misma dirección si están situados sobre la misma recta o sobre rectas paralelas.
- Dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ de la misma dirección, diremos que tienen el mismo sentido si están en el mismo semiplano de la recta AC. Tendrán sentido contrario si están en distinto semiplano.

❖ Vectores equivalentes

Dos ***vectores*** se dicen que son ***equivalentes*** si tienen la misma dirección, sentido y módulo.
La equivalencia se designa con el símbolo $\sim$.

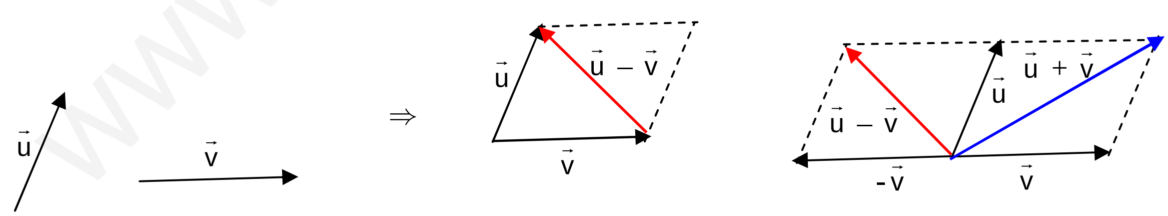
OPERACIONES CON VECTORES

❖ Suma de vectores



❖ Resta de vectores

Para restar dos vectores $\vec{u} - \vec{v}$ se le suma a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



❖ Producto de un vector por un número

El producto de un número k por un vector $\vec{u}$ es otro vector $k\vec{u}$ que tiene la misma dirección de $\vec{u}$, el mismo sentido, si $k > 0$, o sentido contrario si $k < 0$ y su módulo es igual a $|k| \cdot |\vec{u}|$

VECTORES INDEPENDIENTES. BASE

❖ Combinación lineal de vectores

Un vector $\vec{w}$ es combinación lineal de otros dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si existen dos números reales, a y b, tales que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

❖ Vectores linealmente independientes y dependientes

- Dados dos vectores del plano, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se dice que son ***linealmente dependientes*** cuando si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que se verifica que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

- Se dice que dos vectores son ***linealmente independientes*** cuando no son dependientes. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con distinta dirección son linealmente independientes.

- Dos ***vectores*** son ***paralelos*** cuando tienen la misma dirección, es decir, cuando sus componentes son proporcionales.

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \text{ y } \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ tienen la misma dirección si } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

❖ Base

Se dice que dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, forman una ***base*** en el plano cuando son linealmente independientes y cualquier vector se puede expresar como combinación lineal de estos dos.

❖ Base ortogonal y ortonormal

- Dada una base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, decimos que es una base ortogonal cuando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.
- Dada una base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, decimos que es una ***base ortonormal*** cuando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares y además ambos tienen módulo 1, $|\vec{u}| = 1$ y $|\vec{v}| = 1$

❖ Coordenadas de un vector respecto de una base

Cualquier vector $\vec{w}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ de forma única:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}, \text{ donde } a, b \in \mathbb{R}$$

Diremos que el par ordenado (a,b) son las coordenadas de $\vec{w}$ respecto de la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$

SISTEMA DE REFERENCIA. COORDENADAS DE UN VECTOR

❖ Sistema de referencia

Un ***sistema de referencia*** en el plano es una terna $R = \{O, \{\vec{u}, \vec{v}\}\}$, está formado por un punto fijo O y una base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.

- Al punto O se le llama ***origen*** del sistema de referencia.
- A las rectas OX y OY que contienen a los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ con origen en O, se les llama ***ejes*** del sistema.

❖ Vector de posición de un punto

A cada punto P del plano le asociamos el vector de origen O y extremo P, $\overrightarrow{OP}$, llamado ***vector de posición*** del punto P. Las coordenadas del punto P son las del vector $\overrightarrow{OP}$.

❖ Coordenadas de un vector determinado por dos puntos

Si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

❖ Módulo de un vector a partir de las coordenadas de los puntos

Si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2) \Rightarrow \vec{u} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

❖ Operaciones con coordenadas

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores del plano y $k \in \mathbb{R}$::

- $\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1, u_2) \pm (v_1, v_2) = (u_1 \pm v_1 , u_2 \pm v_2)$
- $k\vec{u} = k(u_1, u_2)\ k = (ku_1 , k\, v_1)$

PRODUCTO ESCALAR

❖ Producto escalar:

Se llama ***producto escalar*** de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, y se escribe $\vec{u} \cdot \vec{v}$, al número que resulta al multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

❖ Signo del producto escalar

- Si el ángulo $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ es agudo $\Rightarrow \cos (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) > 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$
- Si el ángulo $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ es obtuso $\Rightarrow \cos (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) < 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

❖ Propiedad fundamental:

a) Si $\vec{u} = \vec{0}$ ó $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. El recíproco no es cierto.

b) Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si y sólo si $\vec{u} \perp \vec{v}$

❖ Operativa con el producto escalar. Propiedades

1) *Propiedad conmutativa:* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2) *Propiedad asociativa:* $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

3) *Propiedad distributiva:* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

❖ Expresión analítica del producto escalar

Si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

❖ Expresión analítica del módulo de un vector

Si $\vec{u} = (u_1, u_2) \Rightarrow |\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

❖ Interpretación geométrica

"El producto escalar de dos vectores es igual al producto de uno de ellos por el vector obtenido al proyectar el otro sobre él"

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \text{proy}\,(\vec{u}, \vec{v})$$

Si el ángulo es obtuso, $|\vec{u}| \cdot \cos\alpha = -|\vec{u}| \cdot \cos(180° - \alpha) = -|\overrightarrow{OA'}| \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{OA'}|$

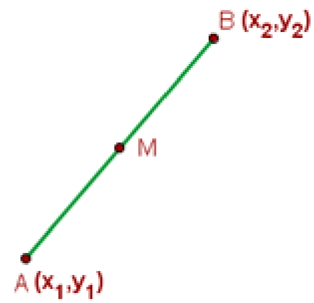
❖ Expresión analítica del ángulo formado por dos vectores

Dados dos vectores $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

APLICACIONES

❖ Coordenadas del punto medio de un segmento

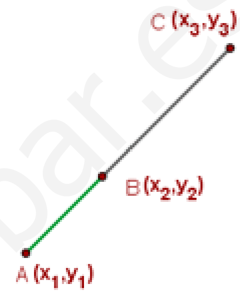
Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de los extremos.



$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

❖ Condición para qué tres puntos estén alineados

Los puntos A (x_1, y_1), B(x_2, y_2) y C(x_3, y_3) están alineados siempre que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tengan la misma dirección.



Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales.

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$$

❖ Simétrico de un punto respecto de otro

Si A' es el simétrico de A respecto de M, entonces M es el punto medio del segmento AA'. Por lo que se verificará igualdad: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$

❖ Coordenadas del baricentro

El baricentro o centro de gravedad de un triángulo es el punto de intersección de sus medianas.

Las coordenadas del baricentro son:

$$\mathbf{G} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

❖ División de un segmento en una relación dada

Dividir un segmento AB en una relación dada r es determinar un punto P de la recta que contiene al segmento AB, de modo que las dos partes, PA y PB, están en la relación r:

$$\overrightarrow{PA} = r \cdot \overrightarrow{PB}$$