

VECTORES

❖ Definición de vector:

Un **vector** es un segmento orientado que queda determinado por dos puntos, A y B, el primero de los puntos se denomina **origen** y el segundo es el **extremo**, y se designa por \overline{AB} .

- El conjunto de vectores fijos de un plano recibe el nombre de **plano vectorial** y se designa por V_2

❖ Elementos de un vector

Un vector $\vec{u} = \overline{AB}$ queda determinado por su módulo, dirección y sentido:

2. **Módulo del vector** \vec{u} , como la longitud del vector \overline{AB} , o bien, la distancia entre los puntos A y B. Se designa por $|\overline{AB}|$.
 3. **Dirección del vector** \vec{u} , como la dirección de la recta que contiene a los puntos A y B.
 4. **Sentido del vector** \vec{u} , como el recorrido de la recta cuando nos desplazamos de A a B.
- Dos vectores \overline{AB} y \overline{CD} tienen la misma dirección si están situados sobre la misma recta o sobre rectas paralelas.
 - Dos vectores \overline{AB} y \overline{CD} de la misma dirección, diremos que tienen el mismo sentido si están en el mismo semiplano de la recta AC. Tendrán sentido contrario si están en distinto semiplano.

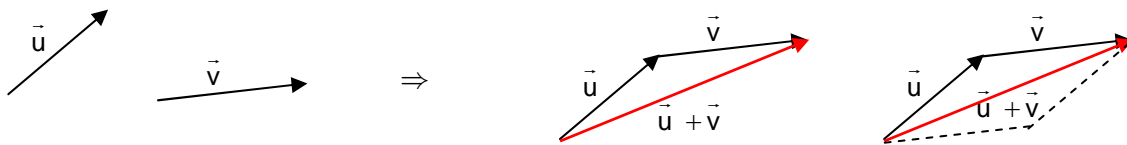
❖ Vectores equivalentes

Dos **vectores** se dicen que son **equivalentes** si tienen la misma dirección, sentido y módulo.

La equivalencia se designa con el símbolo \sim .

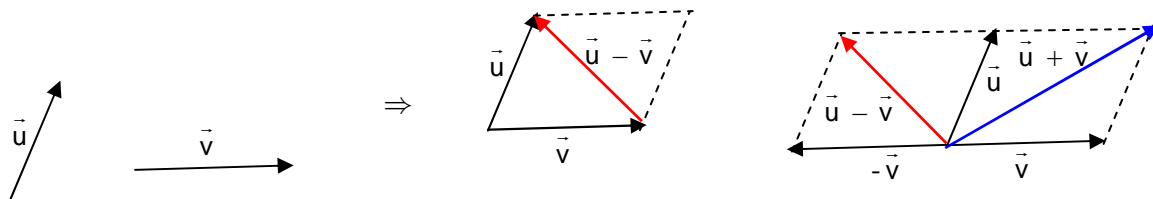
OPERACIONES CON VECTORES

❖ Suma de vectores



❖ Resta de vectores

Para restar dos vectores $\vec{u} - \vec{v}$ se le suma a \vec{u} el opuesto de \vec{v} : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



❖ Producto de un vector por un número

El producto de un número k por un vector \vec{u} es otro vector $k\vec{u}$ que tiene la misma dirección de \vec{u} , el mismo sentido, si $k > 0$, o sentido contrario si $k < 0$ y su módulo es igual a $|k| \cdot |\vec{u}|$

VECTORES INDEPENDIENTES. BASE

❖ Combinación lineal de vectores

Un vector \vec{w} es combinación lineal de otros dos vectores \vec{u} y \vec{v} , si existen dos números reales, a y b , tales que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

❖ Vectores linealmente independientes y dependientes

- Dados dos vectores del plano, \vec{u} y \vec{v} , se dice que son **linealmente dependientes** cuando si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que se verifica que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$
- Se dice que dos vectores son **linealmente independientes** cuando no son dependientes. Dos vectores \vec{u} y \vec{v} con distinta dirección son linealmente independientes.
- Dos **vectores** son **paralelos** cuando tienen la misma dirección, es decir, cuando sus componentes son proporcionales.

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \text{ y } \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ tienen la misma dirección si } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

❖ Base

Se dice que dos vectores, \vec{u} y \vec{v} , forman una **base** en el plano cuando son linealmente independientes y cualquier vector se puede expresar como combinación lineal de estos dos.

❖ Base ortogonal y ortonormal

- Dada una base $B = \{ \vec{u}, \vec{v} \}$, decimos que es una base ortogonal cuando \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares.
- Dada una base $B = \{ \vec{u}, \vec{v} \}$, decimos que es una **base ortonormal** cuando \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares y además ambos tienen módulo 1, $|\vec{u}| = 1$ y $|\vec{v}| = 1$

❖ Coordenadas de un vector respecto de una base

Cualquier vector \vec{w} se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base $B = \{ \vec{u}, \vec{v} \}$ de forma única:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}, \text{ donde } a, b \in \mathbb{R}$$

Diremos que el par ordenado (a,b) son las coordenadas de \vec{w} respecto de la base $B = \{ \vec{u}, \vec{v} \}$

SISTEMA DE REFERENCIA. COORDENADAS DE UN VECTOR

❖ Sistema de referencia

Un **sistema de referencia** en el plano es una terna $R = \{ O, \{ \vec{u}, \vec{v} \} \}$, está formado por un punto fijo O y una base $B = \{ \vec{u}, \vec{v} \}$.

- Al punto O se le llama **origen** del sistema de referencia.
- A las rectas OX y OY que contienen a los vectores $\{ \vec{u}, \vec{v} \}$ con origen en O , se les llama **ejes** del sistema.

❖ Vector de posición de un punto

A cada punto P del plano le asociamos el vector de origen O y extremo P , \overline{OP} , llamado **vector de posición** del punto P . Las coordenadas del punto P son las del vector \overline{OP} .

❖ Coordenadas de un vector determinado por dos puntos

$$\text{Si } A = (a_1, a_2) \text{ y } B = (b_1, b_2) \Rightarrow \overline{AB} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

❖ Módulo de un vector a partir de las coordenadas de los puntos

$$\text{Si } A(a_1, a_2) \text{ y } B(b_1, b_2) \Rightarrow \vec{u} = |\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

❖ Operaciones con coordenadas

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores del plano y $k \in \mathbb{R}$:

- $\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1, u_2) \pm (v_1, v_2) = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2)$
- $k\vec{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, kv_2)$

PRODUCTO ESCALAR

❖ Producto escalar:

Se llama **producto escalar** de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, y se escribe $\vec{u} \cdot \vec{v}$, al número que resulta al multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

❖ Signo del producto escalar

- Si el ángulo $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ es agudo $\Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) > 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$
- Si el ángulo $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ es obtuso $\Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

❖ Propiedad fundamental:

- a) Si $\vec{u} = \vec{0}$ ó $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. El recíproco no es cierto.
- b) Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si y sólo si $\vec{u} \perp \vec{v}$

❖ Operativa con el producto escalar. Propiedades

- 1) *Propiedad conmutativa:* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- 2) *Propiedad asociativa:* $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$
- 3) *Propiedad distributiva:* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

❖ Expresión analítica del producto escalar

Si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

❖ Expresión analítica del módulo de un vector

Si $\vec{u} = (u_1, u_2) \Rightarrow |\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

❖ Interpretación geométrica

“El producto escalar de dos vectores es igual al producto de uno de ellos por el vector obtenido al proyectar el otro sobre él”

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \text{proy}(\vec{u}, \vec{v})$$

Si el ángulo es obtuso, $|\vec{u}| \cdot \cos \alpha = -|\vec{u}| \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = -|\vec{u}| \cdot \frac{|\vec{OA}|}{|\vec{v}|} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{v}| \cdot |\vec{OA}|$

❖ Expresión analítica del ángulo formado por dos vectores

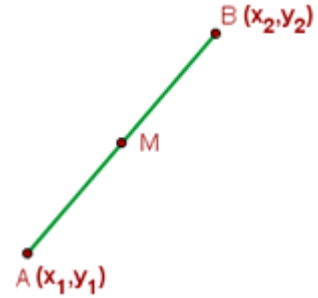
Dados dos vectores $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2) \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

APLICACIONES

❖ Coordenadas del punto medio de un segmento

Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de los extremos.

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

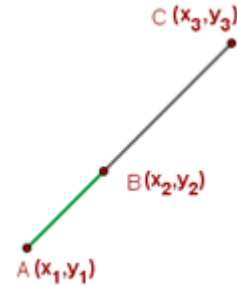


❖ Condición para qué tres puntos estén alineados

Los puntos A (x₁, y₁), B(x₂, y₂) y C(x₃, y₃) están alineados siempre que los vectores \overline{AB} y \overline{AC} tengan la misma dirección.

Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales.

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$$



❖ Simétrico de un punto respecto de otro

Si A' es el simétrico de A respecto de M, entonces M es el punto medio del segmento AA'. Por lo que se verificará igualdad: $\overline{AM} = \overline{MA'}$

❖ Coordenadas del baricentro

El baricentro o centro de gravedad de un triángulo es el punto de intersección de sus medianas.

Las coordenadas del baricentro son:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

❖ División de un segmento en una relación dada

Dividir un segmento AB en una relación dada r es determinar un punto P de la recta que contiene al segmento AB, de modo que las dos partes, PA y PB, están en la relación r:

$$\overline{PA} = r \cdot \overline{PB}$$