Atención: *Los resultados serán válidos sólo cuando los razonamientos empleados se incluyan. Todos los problemas valen 2 puntos. Los resultados deben simplificarse.*

1) Demostrar que es cierta la identidad: $\dfrac{1-\cos^2 x}{4\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$
2) Resolver la ecuación $\cos 2x + 2\cos^2 x = 1 - 2\cos x$
3) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 25$ m, $B = 36º$ y $C = 58º$
4) Calcular $(-3 + i\sqrt{3})^{13}$
5) Hallar todas las raíces cúbicas de -27 en el conjunto de los números complejos.

SOLUCIONES

1) Demostrar que es cierta la identidad: $\dfrac{1-\cos^2 x}{4\cos^2 \frac{x}{2}} = \text{sen}^2 \dfrac{x}{2}$

$$\frac{1-\cos^2 x}{4\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-\cos^2 x}{4\frac{1+\cos x}{2}} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos x}{2} = \text{sen}^2 \frac{x}{2}$$

2) Resolver la ecuación $\cos 2x + 2\cos^2 x = 1 - 2\cos x$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 1 - 2\cos x \;\Rightarrow\; \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x = 0 \;\Rightarrow$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x = 0 \;\Rightarrow$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x = 0 \;\Rightarrow\; 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} =$$

$$\frac{-1\pm 3}{4} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-4}{4} = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k,\ k \in Z \\ = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k,\ k \in Z \\ x = 300^\circ + 360^\circ k,\ k \in Z \end{cases} \end{array}\right.$$

3) Resolver un triángulo sabiendo que a = 25 m, B = 36º y C = 58º

Conocemos dos ángulos y un lado, por lo que utilizamos el Teorema de los Senos. En primer lugar, hallamos el ángulo que nos falta:

$$A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 36^\circ - 58^\circ = 86^\circ$$

Entonces:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \;\Rightarrow\; b = \frac{a\,\text{sen } B}{\text{sen } A} = \frac{25\,\text{sen } 36^\circ}{\text{sen } 86^\circ} = 14{,}73 \text{ m}$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \;\Rightarrow\; c = \frac{a\,\text{sen } C}{\text{sen } A} = \frac{25\,\text{sen } 58^\circ}{\text{sen } 86^\circ} = 21{,}25 \text{ m}$$

4) Calcular $(-3 + i\sqrt{3})^{13}$

Desarrollar la expresión en binómica es muy complicado, por lo que comenzamos pasando la base a polares.

- Módulo: $\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Argumento: $\text{tg}\,\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; \beta = 30^\circ$. Pero como la parte real es negativa (–3) y la parte imaginaria, positiva ($\sqrt{3}$), estamos en el 2º cuadrante $\Rightarrow$ $\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

Por tanto, $-3 + \sqrt{3} = (2\sqrt{3})_{150^\circ}$. Luego:

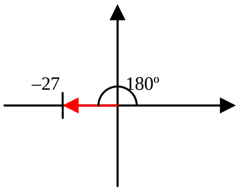
$$(-3 + \sqrt{3})^{13} = \left[(2\sqrt{3})_{150^\circ}\right]^{13} = \left[\left(2\sqrt{3}\right)^{13}\right]_{150^\circ\cdot 13} = \left[2^{13}\left(\sqrt{3}\right)^{13}\right]_{1950^\circ} = \left[2^{13}\left(\sqrt{3}\right)^{12}\sqrt{3}\right]_{1950^\circ} =$$

$$= \left[2^{13}3^{6}\sqrt{3}\right]_{150^\circ}$$

dado que al dividir 1950º entre 360º se obtiene de cociente 5 y de resto, 150º (o sea, 5 vueltas completas más 150º).

5) Hallar todas las raíces cúbicas de –27 en el conjunto de los números complejos.

Comenzamos escribiendo – 27 (que está en binómica) en polares:



$$-27 = -27 + 0i = 27_{180º}$$

Por tanto, el módulo del número del que hay que hallar todas las raíces cúbicas es 27, y el argumento 180º. Lo que significa que las tres soluciones (son raíces cúbicas) tienen de módulo:

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

Sus argumentos respectivos, serán:

$$\alpha_1 = \frac{180º}{3} + \frac{360º}{3}\cdot 0 = 60º$$

$$\alpha_2 = \frac{180º}{3} + \frac{360º}{3}\cdot 1 = 60º + 120º = 180º$$

$$\alpha_3 = \frac{180º}{3} + \frac{360º}{3}\cdot 2 = 60º + 120º\cdot 2 = 300º$$

Por lo que las tres soluciones son:

$$\boxed{z_1 = 3_{60º};\quad z_2 = 3_{180º} = -3;\quad z_3 = 3_{300º}}$$