Atención: *Los resultados serán válidos sólo cuando los razonamientos empleados se incluyan. Todos los problemas valen 2 puntos. Los resultados deben simplificarse.*

1) Demostrar que es cierta la identidad: $\frac{\text{sen } 2x}{1+\cos 2x} = \text{tg } x$
2) Resolver la ecuación $\cos 2x = 1 + 4 \text{ sen } x$
3) Resolver un triángulo sabiendo que a = 5 cm, b = 4 cm y C = 47º (ángulo comprendido)
4) Usando fórmulas trigonométricas y sin usar calculadora, hallar todas las razones de a, sabiendo que tg a = 2, y que a > 180º. Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale a.
5) Sin usar calculadora, decir los valores de: a) tg 4800º; b) cos (–4725º); c) sen 15º; d) sen 75º – sen 15º

SOLUCIONES

1) Demostrar que es cierta la identidad: $\dfrac{\text{sen } 2x}{1+\cos 2x} = \text{tg } x$

$$\frac{\text{sen } 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\text{sen } x\cos x}{1+\cos^2 x-\text{sen}^2 x} = \frac{2\text{sen } x\cos x}{1-\text{sen}^2 x+\cos^2 x} = \frac{2\text{sen } x\cos x}{\cos^2 x+\cos^2 x} = \frac{2\text{sen } x\cos x}{2\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \text{tg } x$$

2) Resolver la ecuación $\cos 2x = 1 + 4 \text{ sen } x$

$$\cos 2x = 1 + 4 \text{ sen } x \;\Rightarrow\; \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 + 4 \text{ sen } x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = 1 + 4 \text{ sen } x \;\Rightarrow\; -2 \text{ sen}^2 x = 4 \text{ sen } x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 0 = 2 \text{ sen}^2 x + 4 \text{ sen } x \;\Rightarrow\; 2 \text{ sen } x (\text{sen } x + 2) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ + 180^\circ k,\, k \in Z \\ \text{sen } x + 2 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = -2 \Rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

3) Resolver un triángulo sabiendo que a = 5 cm, b = 4 cm y C = 47º (ángulo comprendido)

Por el T. del coseno: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 25 + 16 - 2\cdot 5\cdot 4 \cos 47^\circ \;\Rightarrow\; \boxed{c = 3.70 \text{ m}}$

Para calcular A volvemos a emplear el T. del coseno, porque el del seno daría dos resultados y sólo uno de ellos sería válido, al haber empezado el problema con el T. del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \;\Rightarrow\; \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4^2+3.7^2-5^2}{2\cdot 4\cdot 3.7} \;\Rightarrow\; \boxed{A = 80{,}83^\circ}$$

De donde: $B = 180^\circ - (A + C) = \boxed{52.17^\circ}$

4) Usando fórmulas trigonométricas y sin usar calculadora, hallar todas las razones de a, sabiendo que $\text{tg } a = 2$, y que $a > 180^\circ$. Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale a.

a es del tercer cuadrante $\Rightarrow$

$$1 + \text{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + 2^2 = 5 \;\Rightarrow\; \boxed{\cos a = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}}.$$

Por otra parte: $\text{tg } a = \dfrac{\text{sen } a}{\cos a} \;\Rightarrow\; \boxed{\text{sen } a} = \text{tg } a \cos a = 2\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = \boxed{-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$.

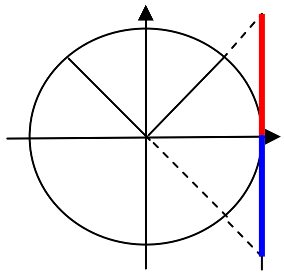
Por tanto: $\boxed{\text{cotg } a = \dfrac{1}{2},\ \sec a = -\sqrt{5},\ \text{cosec } \alpha = -\dfrac{5}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{5\sqrt{5}}{2\cdot 5} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$.

Con la calculadora, usando que $\text{tg } a = 2$, obtenemos 63,43º. Como es del tercer cuadrante:

$$a = 180^\circ + 63{,}43^\circ = \boxed{243{,}43^\circ}.$$

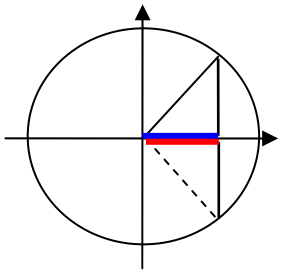
5) Sin usar calculadora, decir los valores de: a) tg 4800º; b) cos (–4725º); c) sen 15º; d) sen 75º – sen 15º

a) Dividiendo 4.800 entre 360 se obtiene 13 de cociente y 120 de resto. Es decir: 4.800º = 360º · 13 + 120º. Luego 4.800º coincide, sobre la circunferencia, con 120º, después de dar 13 vueltas. Por tanto:



$\boxed{\text{tg } 4800^{\circ}} = \text{tg } 120^{\circ} = -\text{tg } (180 - 120^{\circ}) = -\text{ tg } 60^{\circ} = \boxed{-\sqrt{3}}$

b) De la misma forma, $4725 = 360 \cdot 13 + 45^{\circ} \;\Rightarrow\; -4725^{\circ}$ coincide con -45°, después de 13 vueltas en sentido negativo. Y además, por tratarse de un ángulo del 4º cuadrante:



$\boxed{\cos(-4725^{\circ})} = \cos(-45^{\circ}) = \cos(45^{\circ}) = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

c) $\boxed{\text{sen } 15^{\circ}} = \text{sen } 30^{\circ}/2 = +\sqrt{\dfrac{1-\cos 30}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$

El signo + se debe a que 15º es del primer cuadrante. Otra posibilidad es:

$$\boxed{\text{sen } 15^{\circ}} = \text{sen}(45^{\circ}-30^{\circ}) = \text{sen}45^{\circ} \cos 30^{\circ} - \cos 45^{\circ} \text{ sen } 30^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}$$

Ambos resultados coinciden:

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{3}-1)^2}{16}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4\cdot 2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{2(2-\sqrt{3})}{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

d) Transformando en producto:

$$\boxed{\text{sen } 75^{\circ} - \text{sen } 15^{\circ}} = 2 \cos \frac{75+15}{2} \text{ sen} \frac{75-15}{2} = 2 \cos 45 \text{ sen } 30 = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$