Nombre y Apellidos:

Ejercicio 1º.-

Sea el plano π y la recta r de la derecha. Se pide:

a) Posición relativa de π y r

b) Ángulo entre π y r

c) Una recta t paralela y distinta de r en forma implícita

d) Una recta u que se cruce con r en forma continua

$$\pi: \quad x - y + z = 0$$

$$r: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Ejercicio 2º.-

Sea el plano π_1 y el plano π_2 de la derecha. Se pide determinar, caso de que sea posible, el valor, o valores, del parámetro a para obligar a:

a) Que π_1 y π_2 sean paralelos

b) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares

c) Que π_1 y π_2 se corten en una recta r la cual sea perpendicular al plano σ: $x - y = 0$

$$\pi_1: \quad ax + y - z + 1 = 0$$

$$\pi_2: \quad x + ay + z - 2 = 0$$

Ejercicio 3º

Dados los puntos $A(0,5,3)$, $B(0,6,4)$, $C(2,4,2)$ y $D(2,3,1)$ se pide:

a) Comprobar que los cuatros puntos están en el mismo plano y que el polígono ABCD es un paralelogramo

b) Calcular el área de dicho paralelogramo

c) Calcular la recta perpendicular a dicho paralelogramo que pasa por su centro

Ejercicio 4º.-

Dadas las rectas r y s de la derecha. Se pide:

a) Calcular la recta t que pasa por el punto $P(1,0,5)$ y es perpendicular a la recta s

b) Calcular el plano π que contiene a la recta r y es paralelo a s

c) Calcular la distancia entre r y s

$$r: \quad \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$s: \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 1º.-

Sea el plano π y la recta r de la derecha. Se pide:

a) Posición relativa de π y r

b) Ángulo entre π y r

c) Una recta t paralela y distinta de r en forma implícita

d) Una recta u que se cruce con r en forma continua

$$\pi: \quad x-y+z=0$$

$$r: \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

Apartado A

1) Una recta y un plano son paralelos, y sus vectores directores perpendiculares si el producto escalar de estos es nulo, en caso de no ser nulo se cortan en un punto

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=(1,-1,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(2,-1,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)\cdot(2,-1,2)=2+1+2=5\neq 0 \Rightarrow$$

La recta y el plano se cortan en un punto

Apartado B

Siendo α el ángulo que forman

$$sen\,\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{\left|(1,-1,1)\cdot(2,-1,2)\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}}=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}=0{,}9622504486493762741$$

$$\alpha=arc\,sen\left(\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)=74º12'25''$$

Apartado C

Supongamos una recta **s** que pasa por uno de los puntos **R** de la recta dada (tomamos el indicado en la ecuación) y que tiene un vector director diferente

$$\begin{cases} R(1,0,-1) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,2,2) \end{cases} \Rightarrow s\equiv x-1=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{2}$$

Una recta **t** es paralela si no tiene puntos comunes con **r** y su vector director es el mismo

Sea el punto **T**(3 , 1 , -1)

$$\begin{cases} T(3,1,-1) \\ \overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{v_r}=(2,-1,2) \end{cases} \Rightarrow r\equiv\frac{3-1}{2}\neq\frac{1}{2}\Rightarrow T\ no\ pertenece\ a\ r \Rightarrow t\equiv\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

Apartado D

Una recta **u** se cruzará con **r** si tiene un punto **U** no común con los de **r** y su vector director no es igual o proporcional al de **r**

Sea el punto **U**(3 , 1 , -1)

$$\begin{cases} U(3,1,-1) \\ \overrightarrow{v_u}=(3,1,2) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}\neq\frac{1}{-1}\Rightarrow \overrightarrow{v_u}\neq\overrightarrow{v_r}\Rightarrow u\equiv\frac{x-3}{3}=y-1=\frac{z+1}{2}$$

Ejercicio 2º.-

Sea el plano π_1 y el plano π_2 de la derecha. Se pide determinar, caso de que sea posible, el valor, o valores, del parámetro a para obligar a:

a) Que π_1 y π_2 sean paralelos
b) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares
c) Que π_1 y π_2 se corten en una recta r la cual sea perpendicular al plano σ: $x - y = 0$

$$\pi_1: \quad ax + y - z + 1 = 0$$
$$\pi_2: \quad x + ay + z - 2 = 0$$

Apartado A

a) Si dos planos son paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (a, 1, -1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1, a, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1} = \dfrac{-1}{1} \Rightarrow a = -1 \\ \dfrac{1}{a} = \dfrac{-1}{1} \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

Apartado B

b) Si dos planos son perpendiculares sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (a, 1, -1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1, a, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{v_{\pi_2}} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{v_{\pi_2}} = 0 \Rightarrow (a, 1, -1)\cdot(1, a, 1) = 0 \Rightarrow a + a - 1 = 0 \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Apartado C

c) El vector director de la recta es igual o proporcional al del plano
El vector director de la recta, formado por los planos, es el producto vectorial de sus vectores directores.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (a, 1, -1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1, a, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \wedge \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + a^2\vec{k} - \vec{k} + a\vec{i} - a\vec{j} = (1+a)\vec{i} - (1+a)\vec{j} + (a^2 - 1)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = [(1+a), -(1+a), (a^2 - 1)] \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1+a}{1} = \frac{-(1+a)}{-1} = \frac{a^2 - 1}{0} \Rightarrow \left\{ \frac{1+a}{1} = \frac{a^2-1}{0} \Rightarrow \right.$$

$$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3º

Dados los puntos $A(0,5,3)$, $B(0,6,4)$, $C(2,4,2)$ y $D(2,3,1)$ se pide:

a) Comprobar que los cuatro puntos están en el mismo plano y que el polígono ABCD es un paralelogramo
b) Calcular el área de dicho paralelogramo
c) Calcular la recta perpendicular a dicho paralelogramo que pasa por su centro

Apartado A

a) El producto mixto de los vectores **AB**, **AC** y **AD**, que es el volumen del paralelogramo que determinan debe de ser nulo, ya que son coplanarios.
Después estudiaremos que puntos determinan vectores que son paralelos.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0,6,4)-(0,5,3)=(0,1,1) \\ \overrightarrow{AC}=(2,4,2)-(0,5,3)=(2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AD}=(2,3,1)-(0,5,3)=(2,-2,-2)=(1,-1,-1) \end{cases} \Rightarrow V=\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=0\Rightarrow$$

$$V=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}\Rightarrow Dos\ filas\ iguales \Rightarrow V=0\Rightarrow Son\ coplanarios$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0,1,1) \\ \overrightarrow{BC}=(2,4,2)-(0,6,4)=(2,-2,-2)\equiv(1,-1,-1) \\ \overrightarrow{CD}=(2,3,1)-(2,4,2)=(0,-1,-1)=(0,1,1) \\ \overrightarrow{AD}=(1,-1,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \,|\, \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BC} \,|\, \overrightarrow{AD} \end{cases} \Rightarrow Es\ un\ paralelogramo$$

Apartado B

b) El área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de **AB** y **AC**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0,6,4)-(0,5,3)=(0,1,1) \\ \overrightarrow{AC}=(2,4,2)-(0,5,3)=(2,-1,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}+\vec{i}=2\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow$$

$$A=\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\ u^2$$

Apartado C

c) Sera una recta perpendicular al plano, cuyo vector directos se halla como el producto vectorial de los vectores AB y AC y que pase por el punto P punto medio de AC por ejemplo (o BD)

$$\begin{cases} \begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0,1,1) \\ \overrightarrow{AC}=(2,-1,-1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{j}-2\vec{k}=(0,2,-2)\equiv(0,1,-1) \\ \begin{cases} x_P=\dfrac{0+2}{2}=1 \\ y_P=\dfrac{5+4}{2}=\dfrac{9}{2} \\ z_P=\dfrac{3+2}{2}=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(1,\dfrac{9}{2},\dfrac{5}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{9}{2}+\lambda \\ z=\dfrac{5}{2}-\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 4º.-

Dadas las rectas r y s de la derecha. Se pide:

a) Calcular la recta t que pasa por el punto $P(1,0,5)$ y es perpendicular a la recta s

b) Calcular el plano π que contiene a la recta r y es paralelo a s

c) Calcular la distancia entre r y s

$$r: \begin{cases} x-2z-1=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$$

$$s: \left\{ \begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=1-3\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right\} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Apartado A

a) El vector **PG**, donde **G** es el punto genérico de la recta **r** es perpendicular al vector director de dicha recta, el producto escalar de ambos es nulo.
Calculado **G**, la recta **t** queda determinada por **P** y el vector **PG** que será su director.

$$y+3z-3=0 \Rightarrow y=3-3z \Rightarrow x=1+2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+2\mu \\ y=3-3\mu \Rightarrow \\ z=\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2\,,-3\,,1) \\ \overrightarrow{PG}=(1+2\mu\,,3-3\mu\,,\mu)-(1\,,0\,,5)=(2\mu\,,3-3\mu\,,-5+\mu) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{PG}=0 \Rightarrow$$

$$(2\mu\,,3-3\mu\,,-5+\mu)\cdot(2\,,-3\,,1)=0 \Rightarrow 4\mu-9+9\mu-5+\mu=0 \Rightarrow -14+14\mu=0 \Rightarrow 14\mu=14 \Rightarrow$$

$$\mu=1 \Rightarrow \overrightarrow{PG}=(2\cdot 1\,,3-3\cdot 1\,,-5+1)=(2\,,0\,,-4) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=1+2\beta \\ y=0 \\ z=5-4\mu \end{cases}$$

Apartado B

b) Hallamos un plano π que contenga a la recta **r** y sea paralelo a la recta **s**; para ello disponemos del vector director de la recta **s**, del vector director de la recta **r** y el vector **RG**, siendo **G** el punto genérico del plano y **R** un punto cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación), estos tres vectores son coplanarios y el producto mixto de los tres es nulo (ya que lo es el volumen del paralelepípedo que forman) y, además, la ecuación buscada del plano.

$$\text{Siendo } R(1\,,3\,,0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2\,,-3\,,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(1\,,-3\,,1) \\ \overrightarrow{RG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,3\,,0)=(x-1\,,y-3\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$-3\,(x-1)+(y-3)-6z+3z+3\,(x-1)-2\,(y-3)=0 \Rightarrow 0\,(x-1)-(y-3)-3z=0 \Rightarrow \pi \equiv y+3z-3=0$$

Apartado C

c) Hallado el plano π, paralelo a **s** y que contiene a **r**, se halla la distancia de un punto **S** cualquiera de la recta **s** (el indicado en su ecuación) al plano π que es la distancia entre las rectas **r** y **s**

$$\text{Siendo } S(2\,,1\,,0) \Rightarrow d(r\,,s)=d(R\,,\pi)=\frac{|1+3\cdot 0-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}\ u$$