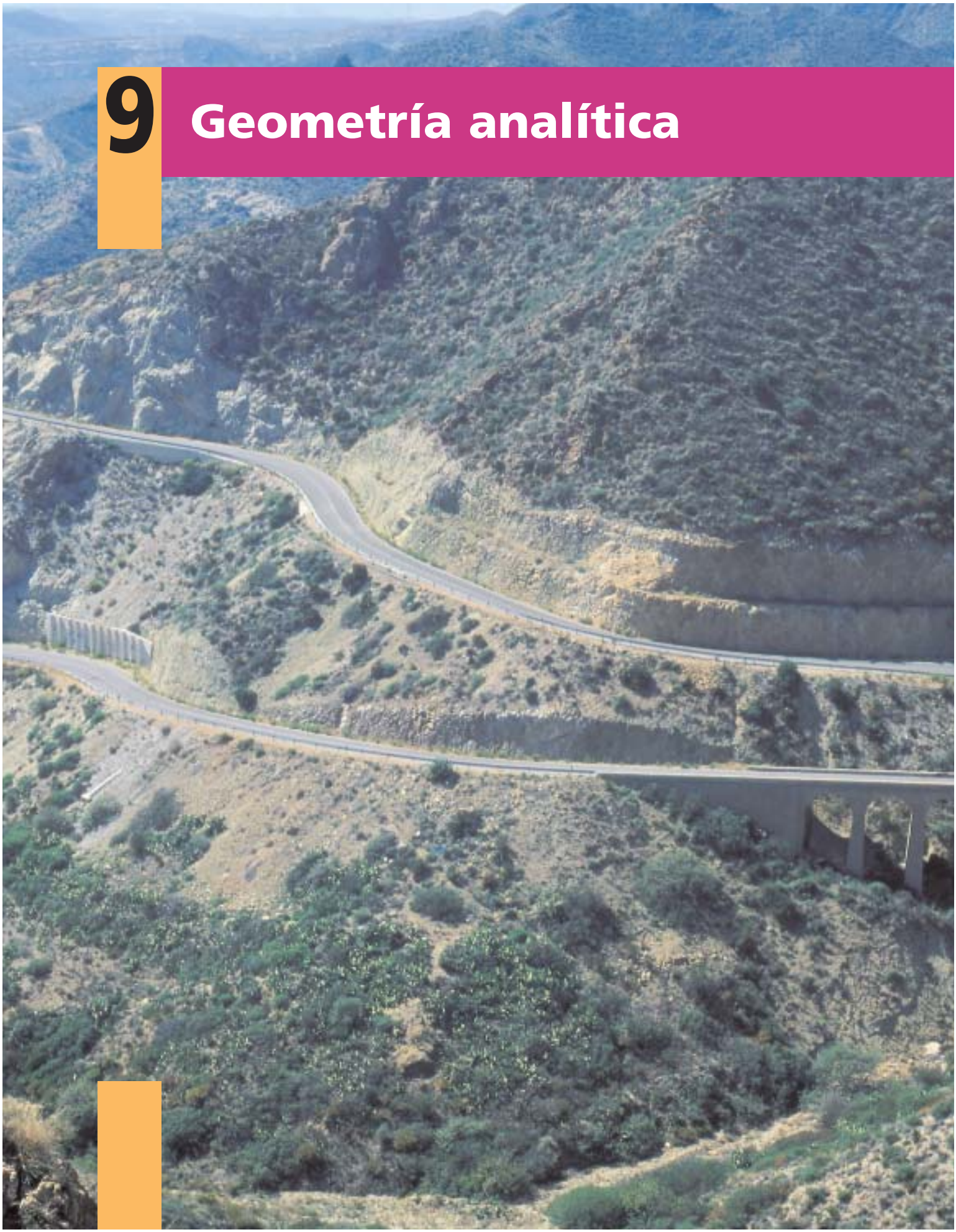
9 Geometría analítica



© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

El tema comienza con el estudio de los vectores en el plano. Se definen las características de un vector y se estudian las operaciones lineales con vectores. Este estudio se realiza geométrica y analíticamente.

En la segunda parte del tema, y la más importante, se presentan los conceptos de vector director, pendiente de una recta y vector normal. A continuación se estudian las formas de la recta: vectorial, paramétricas, continua, general y explícita.

Esta parte del tema se cierra con el estudio de la ecuación de la recta en forma punto pendiente y la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

El tema termina con el estudio de algunas propiedades afines y métricas. Entre las primeras, se trabajan las posiciones relativas entre punto y recta y entre dos rectas. Entre las segundas, se estudia la distancia entre dos puntos, y, como aplicación, la ecuación de la circunferencia.

ORGANIZA TUS IDEAS

GEOMETRÍA ANALÍTICA

estudia

- los vectores
  - que se pueden operar
    - sumar
    - restar
    - multiplicar por un número
- las ecuaciones de la recta:
  - vectorial
  - paramétricas
  - continua
  - general
  - explícita
  - punto-pendiente
  - que pasa por dos puntos
- propiedades afines y métricas
  - que resuelven problemas de
    - posiciones relativas:
      - punto y recta
      - dos rectas
    - rectas:
      - paralelas
      - perpendiculares
    - distancias:
      - distancia entre dos puntos
      - ecuación de la circunferencia

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

1. Vectores

PIENSA Y CALCULA

Dibuja en unos ejes coordenados los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen sus extremos en los puntos: A(4, 3), B(– 4, 3), C(– 4, – 3) y D(4, – 3)

1.1. Vectores

Un **vector fijo** es un segmento orientado. Se representa por $\overrightarrow{OA}$. El punto O es el origen y el punto A es el extremo.

Características de un vector

a) El **módulo:** es su longitud. Se representa por $|\overrightarrow{OA}|$

b) La **dirección:** es la dirección de la recta que lo contiene.

c) El **sentido:** es el que va del origen al extremo.

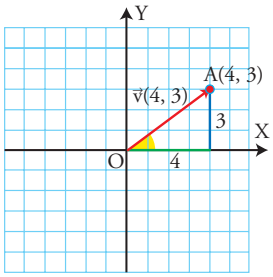
Un **vector libre** es un vector fijo $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, que representa a todos los vectores que tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

Vector de posición

El **vector de posición de un punto A** es el vector $\overrightarrow{OA}$ y generalmente se representa por $\vec{v}(a, b)$, o bien $\vec{v} = (a, b)$

Relación entre puntos y vectores

Dado un vector cuyo origen, O, es el origen de coordenadas, sus componentes coinciden con las coordenadas del extremo del vector, A, y viceversa.



Ejemplo

Dado el punto A(4, 3), halla el vector $\overrightarrow{OA}$, represéntalo y halla sus componentes.

El vector es $\vec{v}(4, 3)$, la componente horizontal es 4, y la vertical, 3

1.2. Cálculo del módulo y argumento de un vector

El **módulo de un vector** es su longitud. Para calcularlo, se aplica el teorema de Pitágoras

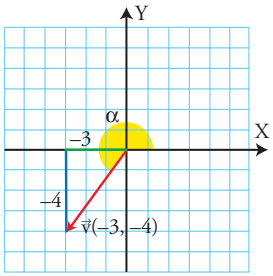
$$\vec{v}(x, y) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

El **argumento de un vector** es el ángulo que forma el semieje positivo X con el vector. Para calcularlo se aplica la definición de tangente:

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$$

Teorema de Pitágoras

El cálculo del módulo de un vector es, en realidad, la aplicación del teorema de Pitágoras, que consiste en hallar la hipotenusa cuando se conocen los catetos.



Ejemplo

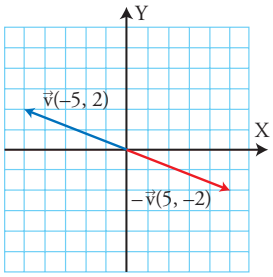
Calcula el módulo y el argumento del vector $\vec{v}(-3, -4)$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 233° \ 7' \ 48''$$

$\boxed{\tan^{-1}}\boxed{(}\boxed{4}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{)}\boxed{=}\boxed{+}\boxed{180}\boxed{=}\boxed{° \ ' \ ''}$ **233° 7' 48"**

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez



1.3. Vector opuesto

Analíticamente, el vector opuesto es el que se obtiene al cambiar de signo sus componentes; geométricamente, es el que tiene el mismo módulo y dirección y sentido contrario.

Ejemplo

El opuesto del vector $\vec{v}(-5, 2)$ es $-\vec{v}(5, -2)$

Comprobación $(-5, 2) + (5, -2) = (0, 0) = \vec{0}$

Vector cero, $\vec{0}$

El vector cero, $\vec{0}$, es el caso particular de cuando el origen del vector coincide con el extremo.

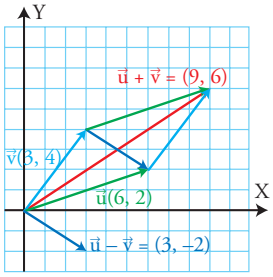
$$\vec{0} = \overrightarrow{AA}$$

1.4. Suma y resta de vectores

Para **sumar y restar vectores** analíticamente, se suman o restan sus componentes. Para sumar vectores geométricamente, se traslada uno sobre el extremo del otro; la suma es el vector que tiene como origen el origen del primero, y extremo, el del segundo. Para restar dos vectores geométricamente, se le suma al primero el opuesto del segundo.

Regla del paralelogramo

Para sumar y restar vectores geométricamente, se forma un paralelogramo uniendo por el origen los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. La diagonal que parte del origen de $\vec{v}$ es el vector suma $\vec{u} + \vec{v}$; y la diagonal que parte del extremo de $\vec{v}$ es el vector resta $\vec{u} - \vec{v}$



Ejemplo

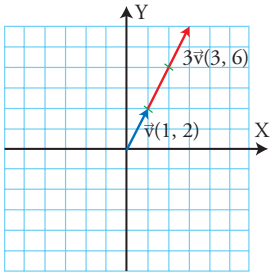
Dados los vectores $\vec{u}(6, 2)$ y $\vec{v}(3, 4)$, calcula $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$

$\vec{u} + \vec{v} = (6, 2) + (3, 4) = (9, 6)$

$\vec{u} - \vec{v} = (6, 2) - (3, 4) = (3, -2)$

1.5. Producto de un número por un vector

Para multiplicar un número por un vector analíticamente, se multiplica el número por las componentes del vector. Para multiplicar un número por un vector geométricamente, se lleva tantas veces el vector sobre sí mismo como indique el número.



Ejemplo

Multiplica por 3 el vector $\vec{v}(1, 2)$

$3\vec{v} = 3(1, 2) = (3, 6)$

APLICA LA TEORÍA

1 Dado el punto A(−5, 4), halla el vector $\overrightarrow{OA}$, represéntalo y halla sus componentes.

2 Dado el vector $\vec{v}(3, -5)$, halla el punto A tal que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, y represéntalo.

3 Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

a) $\vec{v}(5, 2)$ b) $\vec{v}(-4, 3)$

4 Halla el vector opuesto del vector $\vec{v}(5, 4)$ y represéntalos en unos mismos ejes coordenados.

5 Dados los siguientes vectores:

$\vec{u}(-3, 2)$ y $\vec{v}(4, 3)$

calcula analítica y geométricamente:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

6 Dado el vector $\vec{v}(3, 1)$, calcula analítica y geométricamente:

a) $2\vec{v}$

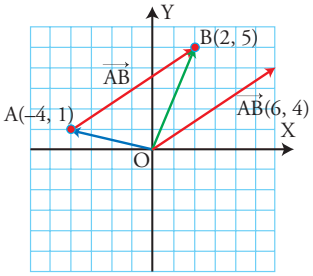
b) $-2\vec{v}$

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

2. Ecuaciones de la recta

PIENSA Y CALCULA

Halla la pendiente del vector $\overrightarrow{AB}$ del primer dibujo del margen y simplifica el resultado.



Observación

Un vector director siempre se debe simplificar, porque lo único que interesa es su dirección, no su longitud.

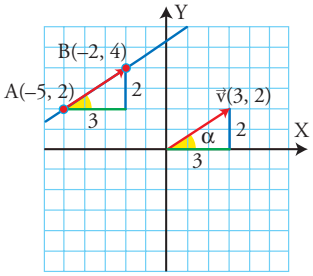
Ejemplo

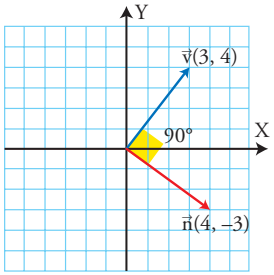
$\vec{v}(4, 6) \parallel (2, 3)$

Interpretación de la pendiente

La pendiente de una recta es la *tangente:*

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{v_2}{v_1}$$





2.1. Componentes de un vector definido por dos puntos

El **vector definido por dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$** es el que se obtiene al restar el vector de posición del extremo menos el del origen.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Sus componentes son: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Ejemplo

Dados los puntos A(– 4, 1) y B(2, 5), calcula el vector $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = (2 - (-4), 5 - 1) = (6, 4)$

2.2. Vector director y pendiente de una recta

Un **vector director** de una recta es un vector paralelo a la recta, es decir, tiene la misma dirección que la recta.

Para hallar el vector director de una recta se toman dos puntos de la recta $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ y se calcula el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

La **pendiente de una recta** es la tangente del ángulo que forma el semieje positivo de las X con la recta, es decir, la tangente del ángulo del vector director de la recta. Se representa con la letra **m**

$$\vec{v}(v_1, v_2) \Rightarrow m = \frac{v_2}{v_1}$$

Para obtener la pendiente de una recta a partir de dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, se calcula $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y se tiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo

Halla un vector director y la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(– 5, 2) y B(– 2, 4)

Vector director: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-2 - (-5), 4 - 2) = (3, 2)$

Pendiente: $m = \frac{2}{3}$

2.3. Vector normal

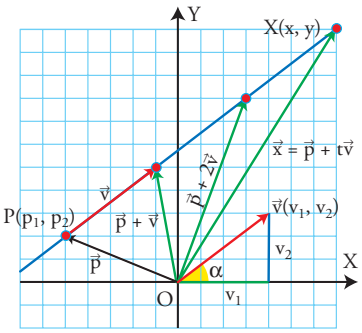
Un **vector normal a un vector** es un vector perpendicular a dicho vector. Dado el vector $\vec{v}(v_1, v_2)$, un vector normal es $\vec{n}(v_2, -v_1)$, es decir, las componentes se cambian de orden y una de ellas se cambia de signo.

Ejemplo

Halla un vector normal al vector $\vec{v}(3, 4)$: vector normal: $\vec{n}(4, -3)$

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

2.4. Ecuaciones de la recta



Una recta queda determinada por un punto $P(p_1, p_2)$ y un vector director $\vec{v}(v_1, v_2)$. Los puntos X(x, y) de la recta se determinan con un vector de posición $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$, donde **t** es un número real.

Los elementos característicos de una recta son:

- un punto $P(p_1, p_2)$ — Ejemplo: P(– 5, 2)
- un vector director $\vec{v}(v_1, v_2)$ — Ejemplo: $\vec{v}(4, 3)$
- la pendiente $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ — Ejemplo: $m = \dfrac{3}{4}$
- un vector normal $\vec{n}(v_2, -v_1)$ — Ejemplo: $\vec{n}(3, -4)$

Ecuaciones	Ejemplo
a) Ecuación vectorial de la recta $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v};\ t \in \mathbb{R}$ $(x, y) = (p_1, p_2) + t\,(v_1, v_2);\ t \in \mathbb{R}$	Halla la ecuación de la recta determinada por el punto P(– 5, 2) y el vector director $\vec{v}(4, 3)$ $(x, y) = (-5, 2) + t\,(4, 3);\ t \in \mathbb{R}$
b) Ecuaciones paramétricas Se obtienen de la ecuación vectorial, al igualar las componentes. $\left.\begin{array}{l} x = p_1 + t\,v_1 \\ y = p_2 + t\,v_2 \end{array}\right\};\ t \in \mathbb{R}$	$\left.\begin{array}{l} x = -5 + 4t \\ y = \ \ 2 + 3t \end{array}\right\};\ t \in \mathbb{R}$
c) Ecuación continua Se obtiene de las ecuaciones paramétricas, despejando el parámetro, **t,** e igualando los valores. $\dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2}$	$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x+5}{4} \\ t = \dfrac{y-2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-2}{3}$
d) Ecuación general Se obtiene de la ecuación continua, al realizar las operaciones y pasar todos los términos al primer miembro. $Ax + By + C = 0$ Un vector normal es: $\vec{n}(A, B)$ Un vector director es: $\vec{v}(B, -A)$ La pendiente es: $m = -\dfrac{A}{B}$	$3(x + 5) = 4(y - 2)$ $3x + 15 = 4y - 8$ $3x - 4y + 23 = 0$ Un vector normal es: $\vec{n}(3, -4)$ Un vector director es: $\vec{v}(4, 3)$ La pendiente es: $m = \dfrac{3}{4}$
e) Ecuación explícita Se obtiene despejando **y** en la ecuación general. $y = mx + b$ **m** es la pendiente y **b** es la ordenada en el origen.	$-4y = -3x - 23$ $4y = 3x + 23$ $y = 3/4x + 23/4$ La pendiente es: m = 3/4 La ordenada en el origen es: b = 23/4

APLICA LA TEORÍA

7 Dados los puntos A(– 2, 1) y B(3, 4), calcula el vector $\overrightarrow{AB}$. Haz la representación gráfica.

8 Representa la recta que pasa por los puntos A(– 2, 3) y B(1, 2). Halla un vector director y la pendiente de dicha recta.

9 Representa la recta que pasa por el punto P(1, 4) y tiene como vector director $\vec{v}(2, -3)$. Halla las distintas ecuaciones de dicha recta.

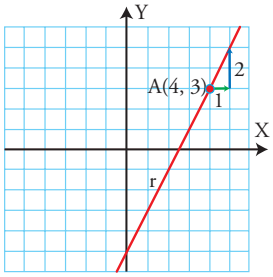
10 Dada la recta 2x + 3y = 6, ¿qué tipo de ecuación es? Halla un punto, un vector normal, un vector director y la pendiente. Haz la representación gráfica.

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

3. Otras ecuaciones de la recta

PIENSA Y CALCULA

Dibuja la recta que pasa por los puntos A(1, 2) y B(5, 5) y halla su pendiente.



3.1. Ecuación punto-pendiente

La **ecuación punto-pendiente** es la ecuación de una recta en la que se conoce un punto $A(x_1, y_1)$ y la pendiente **m.** Es: $\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$

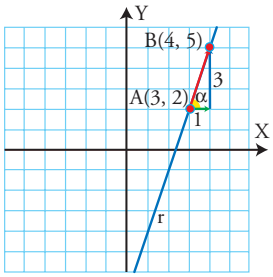
Ejemplo

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(4, 3) y tiene de pendiente 2

$y - 3 = 2(x - 4) \Rightarrow y - 3 = 2x - 8 \Rightarrow \mathbf{y = 2x - 5}$

Observación

Cuando se pide la ecuación de una recta y no se indica cuál, se suele hallar la **general** o la **explícita.**



3.2. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Para hallar la **ecuación de la recta que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$,** se halla el vector director para hallar la pendiente, y luego se aplica la ecuación punto-pendiente.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

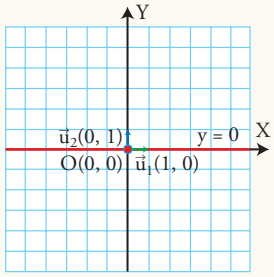
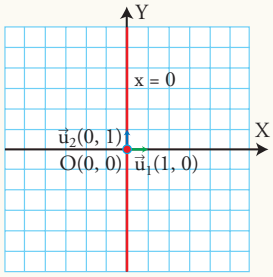
Ejemplo

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3, 2) y B(4, 5)

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4 - 3, 5 - 2) = (1, 3) \Rightarrow m = 3$

$y - 2 = 3(x - 3) \Rightarrow y - 2 = 3x - 9 \Rightarrow \mathbf{y = 3x - 7}$

3.3. Ejes de coordenadas

	Eje X	Eje Y
		
Punto	O(0, 0)	O(0, 0)
Vector director	$\vec{u}_1(1, 0)$	$\vec{u}_2(0, 1)$
	Ecuaciones de los ejes de coordenadas	
Vectorial	$(x, y) = t(1, 0)$; $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$	$(x, y) = t(0, 1)$; $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$
Paramétricas	$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array}\right\}$; $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$	$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \end{array}\right\}$; $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$
General	$y = 0$	$x = 0$

Base ortonormal

$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es la base ortonormal del plano porque sus vectores son perpendiculares y tienen de longitud uno.

También se llama canónica y a veces se representa por:

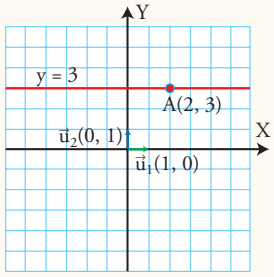
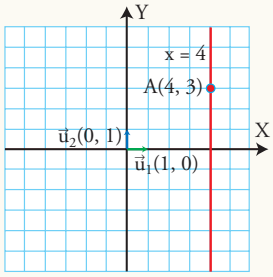
$B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$

$\mathbf{i}(1, 0)$

$\mathbf{j}(0, 1)$

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

3.4. Rectas paralelas a los ejes de coordenadas

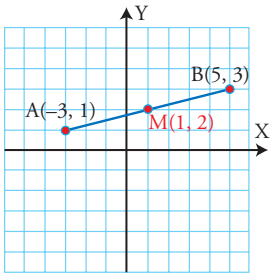
	Paralela al eje X	Paralela al eje Y
		
Punto	$A(a_1, a_2)$	$A(a_1, a_2)$
Vector director	$\vec{u}_1(1, 0)$	$\vec{u}_2(0, 1)$
Ecuaciones de rectas paralelas a los ejes de coordenadas		
Vectorial	$(x, y) = (a_1, a_2) + t(1, 0); \mathbf{t} \in \mathbb{R}$	$(x, y) = (a_1, a_2) + t(0, 1); \mathbf{t} \in \mathbb{R}$
Paramétricas	$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + t \\ y = a_2 \end{array}\right\}; \mathbf{t} \in \mathbb{R}$	$\left.\begin{array}{l} x = a_1 \\ y = a_2 + t \end{array}\right\}; \mathbf{t} \in \mathbb{R}$
General	$y = a_2$	$x = a_1$

Las ecuaciones de los ejes de coordenadas y las rectas paralelas a dichos ejes nunca se dan en forma continua, porque habría que dividir entre cero. Lo más habitual es dar su ecuación general.

3.5. Punto medio de un segmento

Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de los extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Ejemplo

Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos A(– 3, 1) y B(5, 3)

$$M\left(\frac{-3 + 5}{2}, \frac{1 + 3}{2}\right) = \mathbf{M(1, 2)}$$

APLICA LA TEORÍA

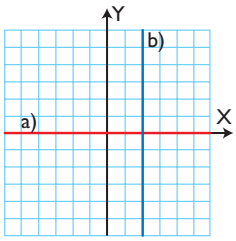
11 Dibuja la recta que pasa por el punto A(– 2, 3) y que tiene de pendiente – 4/5. Halla la ecuación de dicha recta.

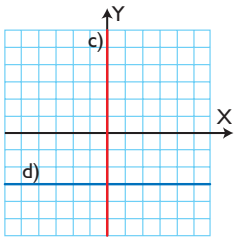
12 Dibuja la recta que pasa por los puntos A(– 3, 1) y B(2, 5). Halla la ecuación de dicha recta.

13 Dibuja la recta que es paralela al eje X y que pasa por el punto A(3, 4). Escribe su ecuación vectorial.

14 Dibuja la recta que es paralela al eje Y y que pasa por el punto A(– 2, 5). Escribe su ecuación paramétrica.

15 Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:





16 Halla el punto medio del segmento de extremos A(3, 4) y B(– 5, 2). Haz la representación gráfica.

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

4. Posiciones, distancia y circunferencia

PIENSA Y CALCULA

Halla todos los puntos de coordenadas enteras en la recta del 1er dibujo del margen.

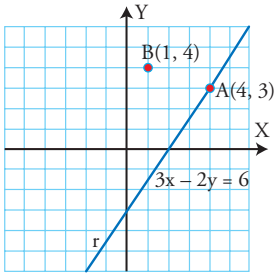
4.1. Posición relativa de punto y recta

Entre un punto y una recta se pueden dar dos posiciones relativas:

a) El punto está en la recta.

b) El punto no está en la recta.

El punto está en la recta si verifica la ecuación de la recta, y no está en ella si no la verifica.



Ejemplo

Estudia la posición relativa de los puntos A(4, 3), B(1, 4) respecto de la recta: $r \equiv 3x - 2y = 6$

$A(4, 3) \Rightarrow 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 12 - 6 = 6 \Rightarrow A(4, 3) \in r$

$B(1, 4) \Rightarrow 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 3 - 8 = -5 \neq 6 \Rightarrow B(1, 4) \notin r$

$r \equiv Ax + By + C = 0$

$s \equiv A'x + B'y + C' = 0$

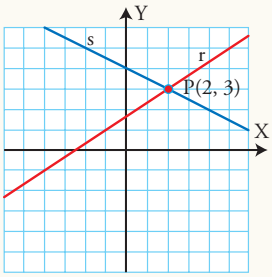
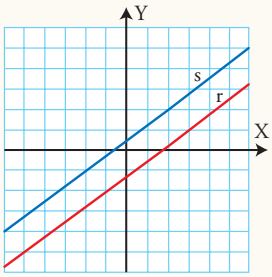
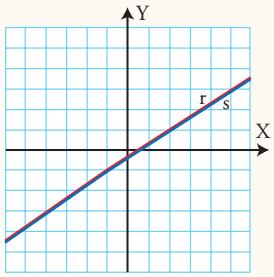
4.2. Posiciones relativas de dos rectas en el plano

Estudiar la posición relativa de dos rectas consiste en ver si son secantes, paralelas o coincidentes.

Rectas secantes	Rectas paralelas	Rectas coincidentes
Dos rectas son **secantes** si tienen un único punto en común.	Dos rectas son **paralelas** si no tienen ningún punto en común. Se representa por ||	Dos rectas son **coincidentes** si son la misma recta.
Criterio		
Los coeficientes de las variables **no** son proporcionales: $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	Los coeficientes de las variables son proporcionales y **no** lo son los términos independientes: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	Los coeficientes de las variables y los términos independientes son proporcionales: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

Ejemplo

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y - 5 = 0 \\ 3x - 4y + 2 = 0 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y - 1 = 0 \\ -2x + 3y + 1 = 0 \end{array}\right\}$
$\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{2}$	$\frac{3}{3} = \frac{-4}{-4} \neq \frac{-5}{2}$	$\frac{2}{-2} = \frac{-3}{3} = \frac{-1}{1}$
Secantes	**Paralelas**	**Coincidentes**
		

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

4.3. Rectas paralelas y perpendiculares

a) Dos rectas **r** y **s** son paralelas si tienen la misma pendiente: $m_r = m_s$

b) Dos rectas **r** y **t** son perpendiculares si la pendiente de una es la opuesta de la inversa de la otra: $m_r = \frac{v_2}{v_1}$, $m_t = -\frac{v_1}{v_2}$

Ejemplo

Dada la recta $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$

a) halla la recta **s** paralela a **r,** que pase por el punto P(4, 1)

b) halla la recta **t** perpendicular a **r,** que pase por el punto P(4, 1)

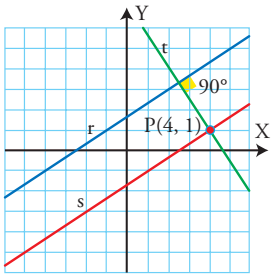
a) La recta **s** tendrá la misma pendiente que la recta **r,** que es:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 4) \Rightarrow 3y - 3 = 2x - 8 \Rightarrow -2x + 3y + 5 = 0 \Rightarrow \mathbf{2x - 3y - 5 = 0}$$

b) Si la pendiente de **r** es $m_r = \frac{2}{3}$, la pendiente de **t** será $m_t = -\frac{3}{2}$

$$y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow 2y - 2 = -3x + 12 \Rightarrow \mathbf{3x + 2y - 14 = 0}$$



4.4. Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo

Halla la distancia que hay entre los puntos A(1, 2) y B(5, 5)

$\overrightarrow{AB}(4, 3) \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ unidades

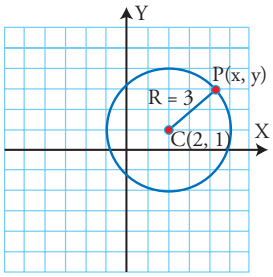
Ejemplo

Halla la ecuación de la circunferencia de centro C(2, 1) y de radio R = 3

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 9$

$\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 2y = 4}$



4.5. Circunferencia

La **circunferencia de centro C(a, b) y radio R** es el lugar geométrico de los puntos del plano P(x, y) cuya distancia al centro C es R. Su ecuación es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

APLICA LA TEORÍA

17 Estudia analítica y gráficamente la posición relativa de los puntos A(1, 2) y B(–3, 4) respecto de la siguiente recta:

$r \equiv 2x + 3y = 6$

18 Estudia analíticamente la posición relativa de las siguientes pares de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 11 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ -2x + y = 1 \end{array}\right\}$

Representa ambas rectas para comprobarlo.

19 Dada la recta $r \equiv 3x + y = 2$, halla una recta **s,** paralela a **r,** y otra perpendicular **t,** que pasen por el punto P(2, – 1). Haz la representación gráfica.

20 Halla la distancia que hay entre los puntos A(–3, 2) y B(4, 5). Haz la representación gráfica.

21 Halla el coeficiente **a** para que la recta $ax + 4y = 11$ pase por el punto P(1, 2). Haz la representación gráfica.

22 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto C(– 1, 1), y de radio, 4. Haz el dibujo.

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

Ejercicios y problemas

1. Vectores

23 Dado el punto A(2, – 5), halla el vector $\overrightarrow{OA}$, represéntalo y halla sus componentes.

24 Dado el vector $\vec{v}(-4, 5)$, halla el punto A, tal que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$, y represéntalo.

25 Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

a) $\vec{v}(4, -2)$

b) $\vec{v}(-3, -4)$

26 Halla el vector opuesto del vector $\vec{v}(-3, 2)$ y represéntalos en unos mismos ejes coordenados.

27 Dados los siguientes vectores:

$\vec{u}(3, 2)$ y $\vec{v}(1, 4)$

calcula analítica y geométricamente:

a) $\vec{v} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

28 Dado el vector $\vec{v}(1, -2)$, calcula analítica y geométricamente:

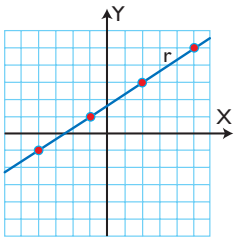
a) $3\vec{v}$

b) $-3\vec{v}$

2. Ecuaciones de la recta

29 Dados los puntos A(1, 2) y B(– 5, 4), calcula el vector $\overrightarrow{AB}$. Haz la representación gráfica.

30 Halla un vector director y la pendiente de la siguiente recta:



31 Representa la recta que pasa por el punto P(– 4, – 1) y tiene como vector director $\vec{v}(3, 2)$. Halla las distintas ecuaciones de dicha recta.

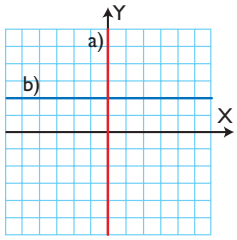
32 Dada la recta y = 2x + 5, ¿qué tipo de ecuación es? Halla un punto, la pendiente, un vector director y un vector normal. Haz la representación gráfica.

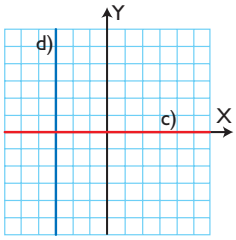
3. Otras ecuaciones de la recta

33 Dibuja la recta que pasa por el punto A(1, 4) y tiene de pendiente 2/3. Halla la ecuación de dicha recta.

34 Dibuja la recta que pasa por los puntos A(– 1, 3) y B(3, 0). Halla la ecuación de dicha recta.

35 Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:

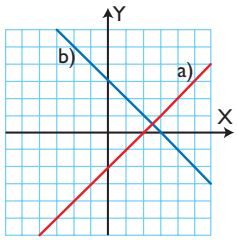


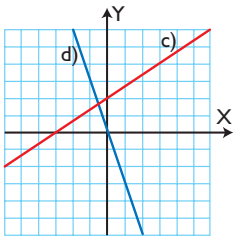


36 Dibuja la recta que es paralela al eje X y que pasa por el punto A(2, – 3). Escribe su ecuación general.

37 Dibuja la recta que es paralela al eje Y y que pasa por el punto A(1, 4). Escribe su ecuación general.

38 Halla la ecuación explícita de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:





39 Halla mentalmente el punto medio del segmento de extremos A(4, – 3) y B(– 1, 5). Haz la representación gráfica.

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

Ejercicios y problemas

4. Posiciones, distancia y circunferencia

40 Estudia analítica y gráficamente la posición relativa de los puntos A(5, 1) y B(–2, 3) respecto de la siguiente recta:

$r \equiv x - 2y = 3$

41 Estudia analíticamente la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{array}\right\}$

Representa ambas rectas para comprobarlo.

42 Dada la recta $r \equiv x - 3y = 1$, halla una recta **s,** paralela a **r,** que pase por el punto P(2, 5). Haz la representación gráfica.

43 Dada la recta $r \equiv 2x + y = 1$, halla una recta **t,** perpendicular a **r,** que pase por el punto P(3, 2). Haz la representación gráfica.

44 Halla la distancia que hay entre los siguientes puntos:

A(– 1, 5) y B(2, 1)

Haz la representación gráfica.

45 Halla el coeficiente **a** para que la recta:

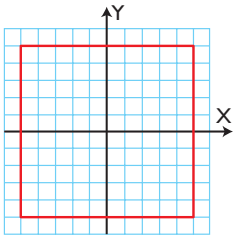
$4x + ay = 7$

pase por el punto P(–2, 3). Haz la representación gráfica.

46 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto C(2, – 1), y de radio, 3. Haz el dibujo.

Para ampliar

47 Dado el siguiente cuadrado de centro el origen de coordenadas y lado de longitud 10:



a) Representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo uno de los vértices del cuadrado.

b) Escribe la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

48 Calcula mentalmente las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ en los siguientes casos:

a) A(3, 4), B(5, 7)

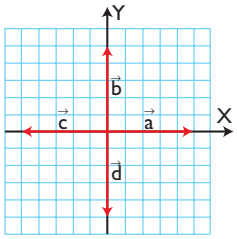
b) A(–4, 1), B(2, –5)

c) A(0, 5), B(–7, 2)

d) A(0, 0), B(3, 5)

49 Halla mentalmente dos vectores perpendiculares al vector $\vec{v}(5, 2)$ y represéntalos gráficamente.

50 Calcula mentalmente el módulo y el argumento de los siguientes vectores:



51 Dada la siguiente recta:

$(x, y) = (-4, 1) + t(2, 3); t \in \mathbb{R}$

halla:

a) el tipo de ecuación.

b) un punto.

c) el vector director.

d) un vector normal.

e) la pendiente.

f) Represéntala.

52 Halla mentalmente un vector normal y un vector director de cada una de las siguientes rectas:

a) $2x + 3y = 5$ b) $-x - 2y = 4$

c) $-3x + y = 1$ d) $5x - 4y = 2$

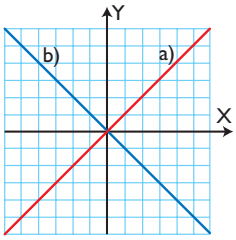
© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

Ejercicios y problemas

53 Halla mentalmente las ecuaciones generales de las siguientes rectas:

a) Eje X b) Eje Y

54 Halla la ecuación explícita de las siguientes rectas representadas en los ejes de coordenadas.



55 Representa y halla mentalmente las ecuaciones generales de las rectas paralelas a los ejes coordenados, que pasan por el punto A(2, – 3)

56 Representa y halla mentalmente las ecuaciones generales de las rectas paralelas a los ejes coordenados, que pasan por el punto A(– 4, 1)

57 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = -1 \end{array}\right\}$$

58 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 6y = 3 \\ -x + 2y = -1 \end{array}\right\}$$

59 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

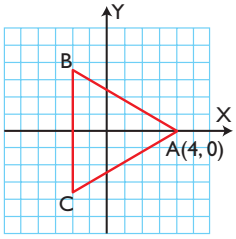
$$\left.\begin{array}{r} x = 2 \\ y = -3 \end{array}\right\}$$

Represéntalas y halla el punto de corte.

60 Halla mentalmente la ecuación de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio R = 3 unidades. Represéntala.

Problemas

61 Dado el triángulo equilátero siguiente, de centro el origen de coordenadas y vértice A(4, 0):



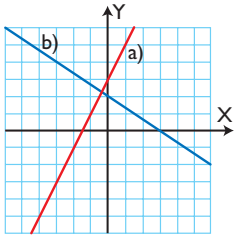
a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo uno de los vértices del triángulo equilátero.

b) Aplicando las razones trigonométricas, halla la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

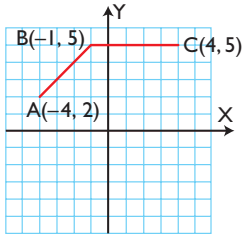
62 Dibuja y calcula el área del triángulo comprendido entre las rectas siguientes:

x = 2, y = 1, x + y = 5

63 Halla la ecuación general de las siguientes rectas representadas en los ejes de coordenadas:



64 De un paralelogramo se conocen tres vértices consecutivos: A(– 4, 2), B(– 1, 5) y C(4, 5)



Halla las coordenadas del cuarto vértice D utilizando la suma de vectores.

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

Ejercicios y problemas

65 Halla analíticamente un vector director y la pendiente de las rectas que están definidas por los dos puntos siguientes:

a) A(0, 0), B(3, 4)

b) A(2, – 1), B(4, 6)

c) A(– 2, 5), B(3, – 4)

d) A(3, – 2), B(4, – 1)

66 Dada la siguiente recta:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$$

halla:

a) el tipo de ecuación.

b) un punto.

c) el vector director.

d) un vector normal.

e) la pendiente.

f) Represéntala.

67 Dada la siguiente recta:

$$y = 2x - 3$$

halla:

a) el tipo de ecuación.

b) un punto.

c) la pendiente.

d) un vector director.

e) un vector normal.

f) Represéntala.

68 Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos A(3, 4), B(– 1, – 2) y C(5, – 4):

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta que contiene la mediana definida por el vértice A

b) Halla la ecuación de dicha recta.

69 Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos A(1, 4), B(– 3, 2) y C(5, – 4):

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta paralela al lado BC, que pasa por el vértice A

b) halla la ecuación de dicha recta.

70 Dibuja el segmento de extremos los puntos A(5, 4) y B(– 1, – 2) y su mediatriz. Halla la ecuación de la mediatriz.

71 Halla el coeficiente **k** para que la recta:

$$kx + 3y = 8$$

pase por el punto A(1, 2)

72 Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 12 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Represéntalas y halla el punto de corte.

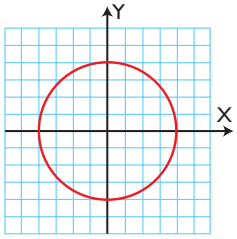
73 Dibuja un rectángulo sabiendo que tiene los lados paralelos a los ejes coordenados, y que las coordenadas de dos vértices opuestos son A(– 3, 5) y B(3, 1). Dibuja y halla la longitud de la diagonal.

74 Halla el valor de **k** para que las siguientes rectas sean paralelas:

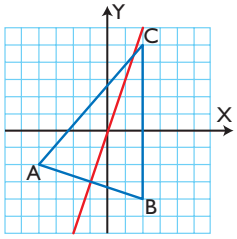
$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ kx - 6y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

75 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto A(– 1, – 2), y de radio, 4 unidades. Haz el dibujo.

76 Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



77 Dado el triángulo de la siguiente figura:

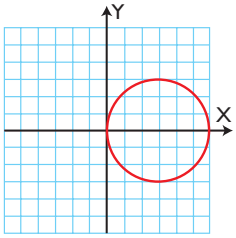


halla la ecuación de la mediatriz del lado AB

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

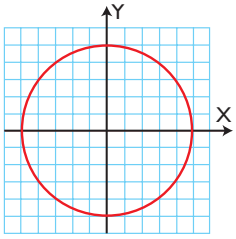
Ejercicios y problemas

78 Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



Para profundizar

79 Dada la circunferencia de centro el origen de coordenadas, y radio, 5



a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo un punto de la circunferencia de coordenadas enteras.

b) Escribe la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

80 Dados los vectores:

$\vec{u}(2, -3)$ y $\vec{v}(-1, 4)$

calcula analíticamente:

a) $3\vec{u} + 5\vec{v}$

b) $5\vec{u} - 3\vec{v}$

81 Dada la siguiente recta:

$5x - 2y + 9 = 0$

halla:

a) el tipo de ecuación.

b) un punto.

c) un vector normal.

d) un vector director.

e) la pendiente.

f) Represéntala.

82 Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos A(–2, 3), B(–5, –1) y C(5, 4)

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta que contiene al lado BC

b) halla la ecuación de dicha recta.

83 Halla el coeficiente **k** para que la recta:

$$5x + ky = 1$$

pase por el punto A(–3, 4)

84 Un romboide tiene tres vértices en los puntos A(–5, 1), B(–2, 5) y C(2, 5)

Halla:

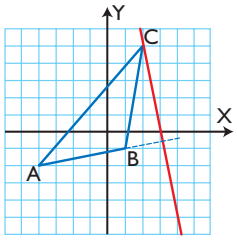
a) el cuarto vértice.

b) la longitud de sus diagonales.

85 Halla la longitud del segmento determinado por los puntos de corte con los ejes coordenados de la recta siguiente:

$$3x + 4y = 12$$

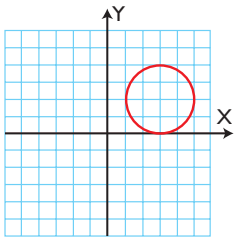
86 Dado el triángulo de la siguiente figura:



halla la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al vértice C

87 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto C(–3, 4), y de radio, 2 unidades. Haz el dibujo.

88 Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

Aplica tus competencias

Ecuación general de la circunferencia

Se llama **ecuación general de la circunferencia** a la expresión:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

Dada la ecuación general de la circunferencia, para hallar el centro y el radio se aplican las fórmulas siguientes:

$$C(a, b) = \left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right), \; R = \sqrt{a^2 + b^2 - p}$$

89 Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:
$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

90 Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:
$x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$

91 Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:
$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

Comprueba lo que sabes

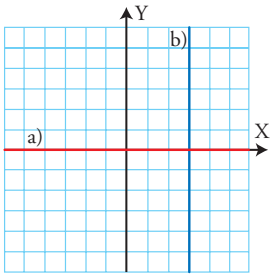
1 Explica cómo se hallan las componentes de un vector definido por dos puntos. Pon un ejemplo.

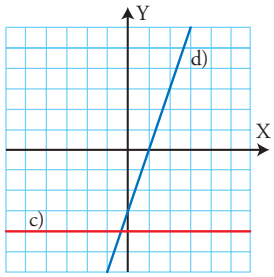
2 Calcula el módulo y el argumento del vector $\vec{v}(4, 3)$

3 Dada la recta $4x - 3y = 12$, ¿qué tipo de ecuación es? Halla dos puntos, un vector normal, un vector director y la pendiente. Haz la representación gráfica.

4 Dibuja la recta que pasa por el punto A(3, 1) y tiene de pendiente 2. Halla la ecuación de dicha recta.

5 Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:





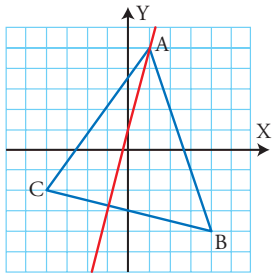
6 Estudia analíticamente la posición relativa del siguiente par de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x - 3y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Representa ambas rectas para comprobarlo.

7 Dada la recta $2x - 3y = 6$, halla su ecuación vectorial.

8 Dado el triángulo de la figura del margen, halla la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al vértice A

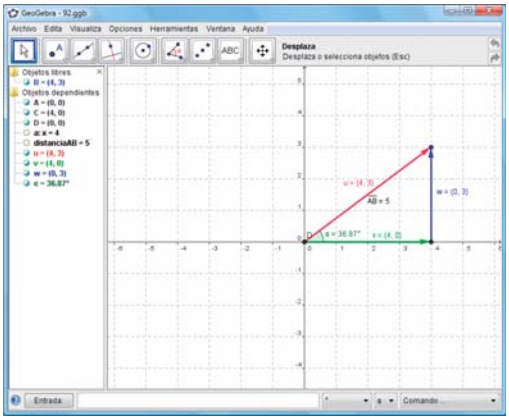


© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

Paso a paso

a) Crea en tu carpeta personal la subcarpeta **09** para guardar todos los ejercicios de este tema.

92 Dibuja el vector **u(4, 3)** y sus componentes. Halla el módulo y el argumento.



Solución:

a) Activa la cuadrícula.

b) Elige **Vector entre dos puntos,** haz *clic* en el origen de coordenadas y en el extremo, punto **(4, 3)**

c) Dibuja una recta perpendicular al eje **X** y que pase por el extremo del vector.

d) Halla el punto de intersección de dicha recta con el eje **X**

e) Oculta la recta.

f) Dibuja la componente horizontal de color verde.

g) Dibuja la componente vertical de color azul.

h) Elige **Distancia** y haz *clic* en el origen y extremo del vector.

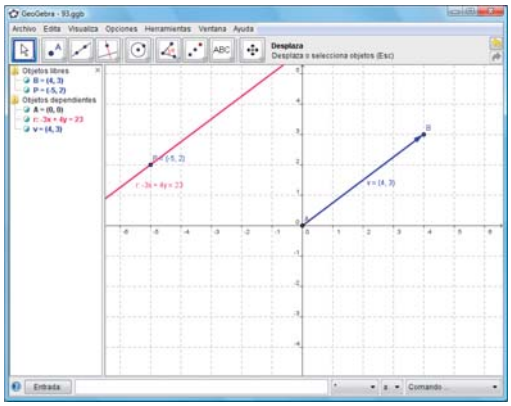
i) Dibuja el ángulo.

j) Guárdalo en la carpeta **09** con el nombre **92**

Geometría dinámica: interactividad

k) *Arrastra* el extremo del vector **v** de forma que el nuevo vector sea **v(– 2, 5).** Verás cómo cambian el módulo y el argumento y las componentes.

93 Dibuja la recta que pasa por el punto **P(– 5, 2)** y tiene de vector director a **v(4, 3).** Halla la ecuación de la recta.



Solución:

a) En la barra de **Entrada** escribe **P = (– 5, 2)**

b) En el menú *Contextual* del punto elige **Propiedades…/*Básico*/Expone rótulo** y selecciona **Nombre & Valor**

c) Dibuja el vector **v(4, 3)** y expón sus coordenadas.

d) Elige **Recta Paralela,** haz *clic* en el punto **P** y en el vector **v**

e) En el menú *Contextual* de la recta elige **Propiedades…/*Básico*/Expone rótulo** y selecciona **Nombre & Valor**

f) Guárdalo en la carpeta **09** con el nombre **93**

Geometría dinámica: interactividad

g) *Arrastra* el punto **P** o el extremo del vector **v** y observa cómo se obtiene la nueva recta y su ecuación.

94 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

Así funciona

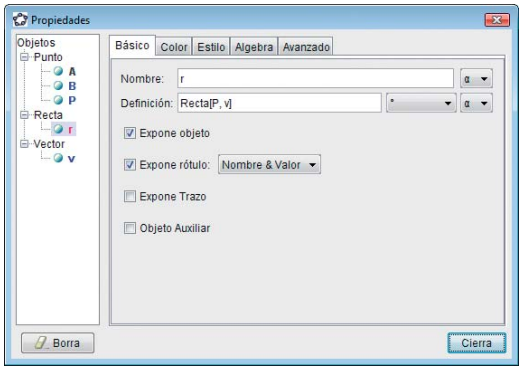
Propiedades de un objeto

Primero se crea el objeto, después en su menú *Contextual* se elige **Propiedades…** y se modifican.

La ventana **Propiedades** de una recta contiene las fichas: ***Básico, Color, Estilo, Álgebra*** y ***Avanzado.***

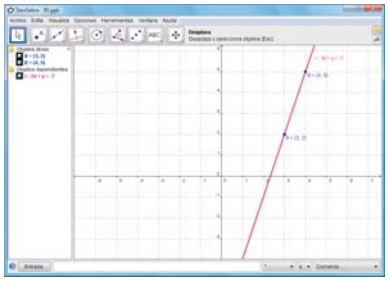
En la ficha ***Básico*** tiene las opciones **Nombre, Definición, Expone objeto, Expone rótulo,** en el que se puede elegir entre **Nombre, Nombre & Valor** y **Valor;** y **Expone Trazo** que deja un trazo al desplazarse.

En la ficha ***Álgebra*** se puede elegir el tipo de ecuación: **General, Explícita** y **Paramétrica.**



Practica

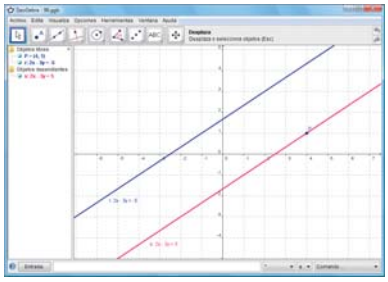
95 Dibuja la recta que pasa por los puntos **A(3, 2)** y **B(4, 5)** y halla su ecuación.



Geometría dinámica: interactividad

Arrastra uno de los puntos que definen la recta y observa cómo se obtiene la nueva ecuación de la recta.

96 Dada la recta **r ≡ 2x – 3y + 5 = 0,** halla una recta **s,** paralela a **r,** que pase por el punto **P(4, 1)**

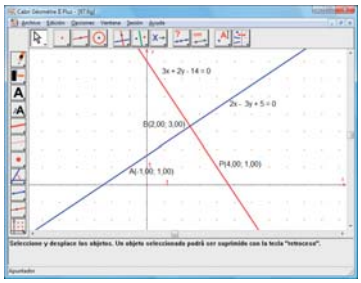


En la **Entrada** escribe: **2x – 3y + 5 = 0**

Geometría dinámica: interactividad

Modifica la recta o el punto **P** y observa cómo se obtiene la nueva recta paralela y su ecuación.

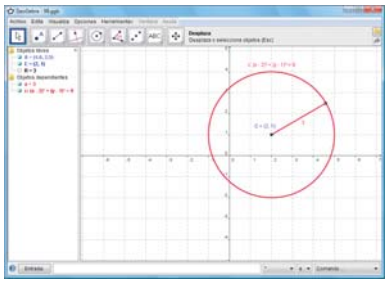
97 Dada la recta **r ≡ 2x – 3y + 5 = 0,** halla una recta **t,** perpendicular a **r,** que pase por el punto **P(4, 1)**



Geometría dinámica: interactividad

Modifica la recta o el punto **P** y observa cómo se obtiene la nueva recta perpendicular y su ecuación.

98 Dibuja la circunferencia de centro **C(2, 1)** y radio **R = 3.** Halla su ecuación.



Geometría dinámica: interactividad

Modifica el centro o el valor del radio y observa cómo se obtiene la nueva circunferencia y su ecuación.

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

Paso a paso

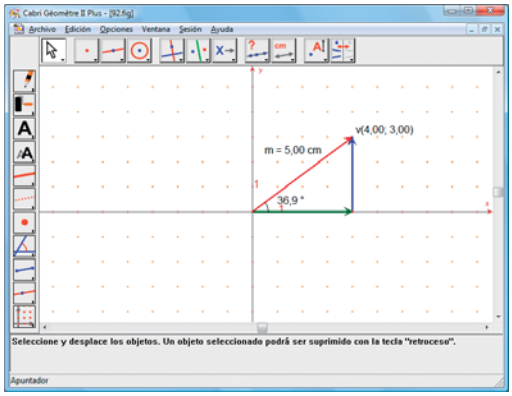
a) En la barra de menús elige **Ayuda** y **Opciones/Mostrar atributos**

b) En la barra de herramientas elige **Mostrar los ejes**

c) Elige **Rejilla** y haz *clic* en uno de los puntos de las divisiones de los ejes.

d) Crea en tu carpeta la subcarpeta **09** para guardar todos los ejercicios de este tema.

92 Dibuja el vector **u(4, 3)** y sus componentes. Halla el módulo y el argumento.



Solución:

a) Elige **Vector,** selecciona color rojo y grosor mediano, haz *clic* en el origen de coordenadas y en el extremo, punto **(4, 3)**

b) Dibuja una recta perpendicular al eje **X** y que pase por el extremo del vector.

c) Halla el punto de intersección de dicha recta con el eje **X**

d) Oculta la recta.

e) Dibuja la componente horizontal de color verde.

f) Dibuja la componente vertical de color azul.

g) Elige **Coord. o Ecuación,** haz *clic* en el extremo del vector **v** y escribe la letra **v** delante.

h) Elige **Distancia y longitud** y haz *clic* en el vector, escribe delante **m** y el signo **=**

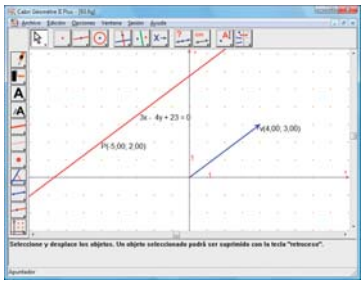
i) Marca y mide el argumento.

j) Guárdalo en la carpeta **09** con el nombre **92**

Geometría dinámica: interactividad

k) *Arrastra* el extremo del vector **v** de forma que el nuevo vector sea **v(– 2, 5).** Verás cómo cambian el módulo y el argumento.

93 Dibuja la recta que pasa por el punto **P(– 5, 2)** y tiene de vector director a **v(4, 3).** Halla la ecuación de la recta.



Solución:

a) Dibuja el punto **P(– 5, 2)**

b) Elige **Coord. o Ecuación,** haz *clic* en el punto **P** y escribe la letra **P** delante.

c) Dibuja el vector **v(4, 3)**

d) Elige **Recta paralela,** haz *clic* en el punto **P** y en el vector **v**

e) Selecciona la recta haciendo *clic* sobre ella y en los atributos elige color rojo y grosor mediano.

f) En la barra de menús elige **Opciones/Preferencias…/*Sistema de coordenadas y Ecuación;*** en **Recta** selecciona **ax + by + c = 0,** que es la forma general.

g) Elige **Coord. o Ecuación,** haz *clic* en la recta para que escriba su ecuación.

h) Guárdalo en la carpeta **09** con el nombre **93**

Geometría dinámica: interactividad

i) *Arrastra* el punto **P** o el extremo del vector **v** y observa cómo se obtiene la nueva recta y su ecuación.

94 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez

Así funciona

Paleta de atributos

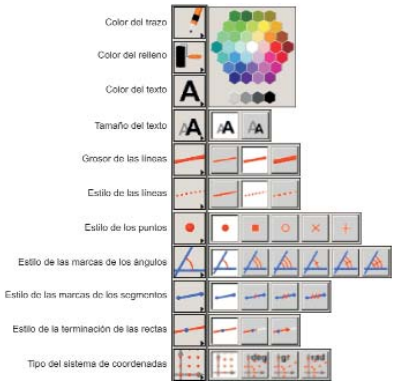
La paleta de atributos permite modificar el aspecto de los objetos: color, grosor, punteado, etc.

a) Para abrir la paleta de atributos, se elige en la barra de menús **Opciones/Mostrar atributos.** También se puede abrir en la última herramienta **Atributos**

b) Cada uno de los atributos contiene varias opciones.

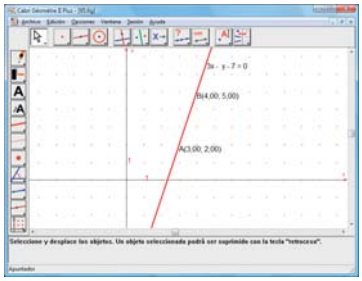
c) Para crear un objeto con un atributo, se elige primero la herramienta y luego el atributo, y se construye el objeto.

d) Para cambiar los atributos de un objeto ya creado, se selecciona el objeto y se elige el atributo.



Practica

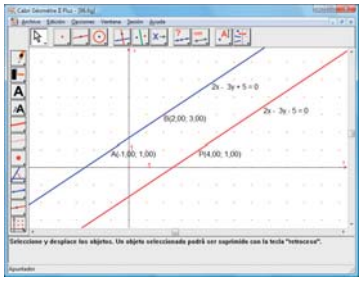
95 Dibuja la recta que pasa por los puntos **A(3, 2)** y **B(4, 5)** y halla su ecuación.



Geometría dinámica: interactividad

Arrastra uno de los puntos que definen la recta y observa cómo se obtiene la nueva ecuación de la recta.

96 Dada la recta **r ≡ 2x – 3y + 5 = 0,** halla una recta **s,** paralela a **r,** que pase por el punto **P(4, 1)**

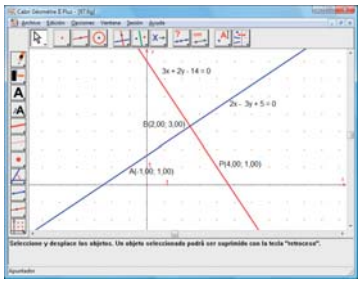


En la **Entrada** escribe: **2x – 3y + 5 = 0**

Geometría dinámica: interactividad

Modifica la recta o el punto **P** y observa cómo se obtiene la nueva recta paralela y su ecuación.

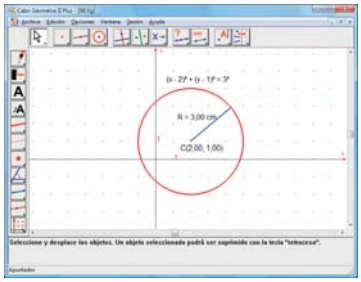
97 Dada la recta **r ≡ 2x – 3y + 5 = 0,** halla una recta **t,** perpendicular a **r,** que pase por el punto **P(4, 1)**



Geometría dinámica: interactividad

Modifica la recta o el punto **P** y observa cómo se obtiene la nueva recta perpendicular y su ecuación.

98 Dibuja la circunferencia de centro **C(2, 1)** y radio **R = 3**. Halla su ecuación.



Geometría dinámica: interactividad

Modifica el centro o el valor del radio y observa cómo se obtiene la nueva circunferencia y su ecuación.

© Grupo Editorial Bruño, SL. Matemáticas de 4º B ESO. Autores José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez