

Geometría analítica

Tipo I: Vectores

1. Un vector fijo tiene su origen en el punto $A(2, -1)$ y es equipolente al vector $\overline{CD}(-1, 4)$. Determina las coordenadas de su extremo y su módulo. **[Sol]** $B(1, 3)$; $|\overline{AB}| = \sqrt{17}$.

2. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos $A(1, -3)$, $B(2, 2)$ y $C(-3, 0)$. Calcula las coordenadas del cuarto vértice. **[Sol]** $D(-4, -5)$

3. Halla el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = \frac{1}{4}$; $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$ b) $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = (2, -3)$; $(\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ$

c) $\vec{u} = \left(3, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{v} = (-1, 3)$ **[Sol]** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3\sqrt{26}}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$

4. Dados los vectores $\vec{u}(1, -2)$, $\vec{v}(3, 1)$ y $\vec{w}(2, 0)$,

a) calcula las coordenadas del vector $2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$,

b) expresa \vec{w} como combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} ,

c) calcula los ángulos que forman dos a dos,

d) halla un vector con la misma dirección que \vec{u} y de módulo $\sqrt{20}$,

[Sol] a) $\left(-\frac{1}{3}, -5\right)$; b) $\vec{w} = \frac{2}{7}\vec{u} + \frac{4}{7}\vec{v}$; c) $(\vec{u}, \vec{v}) = 81^\circ 52' 12''$; $(\vec{u}, \vec{w}) = 63^\circ 26' 6''$; $(\vec{v}, \vec{w}) = 18^\circ 26'$

6''; d) $\vec{x}_1 = (2, -4)$ y $\vec{x}_2 = (-2, 4)$.

5. Si $\vec{u}(2, a)$ y $\vec{v}(1, -4)$ determina el valor de a para que:

a) \vec{u} y \vec{v} sean perpendiculares; b) \vec{u} y \vec{v} tengan el mismo módulo,

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$. **[Sol]** a) $a = \frac{1}{2}$; b) $a = \pm\sqrt{13}$; c) $a = -2$

6. Sea $\vec{u}(3, -2)$. Calcula:

a) un vector \vec{x} unitario y con la misma dirección que \vec{u} ,

b) un vector \vec{z} unitario y perpendicular a \vec{u} .

[Sol] a) $\vec{x}_1 = \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\vec{x}_2 = \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$; b) $\vec{z}_1 = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\vec{z}_2 = \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$.

Tipo II: Determinación de rectas. Posición relativa. Perpendicularidad

7. Escribe todas las ecuaciones de la recta que:

a) pasa por $A(-1, 2)$ y tiene por vector director el $\vec{u}(3, -5)$,

b) pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(2, 2)$,

c) pasa por $A(1, -5)$ y tiene por pendiente $m = -3$.

[Sol] a) $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 5\lambda \end{cases}$; $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-5}$; $5x + 3y - 1 = 0$; $y - 2 = \frac{-5}{3}(x+1)$; $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$ b)

$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$; $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3}$; $3x + y - 8 = 0$; $y + 1 = -3(x-3)$; $y = -3x + 8$ c) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -5 - 3\lambda \end{cases}$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-3}$;

$3x + y + 2 = 0$; $y + 5 = -3(x-1)$; $y = -3x - 2$

8. Estudia la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:

a) $r: 2x - y + 5 = 0$, $s: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1}$ b) $r: x + 2y + 2 = 0$, $s: \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-2}$

[Sol] a) Se cortan en $P(-1, 3)$; b) Paralelas.

9. Determina el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $r: x - y - 3 = 0$, $s: x - 3y - 5 = 0$ b) $r: y + 3 = \frac{1}{2}(x-1)$, $s: y = x + 2$

[Sol] a) $26^\circ 33' 54''$; b) $18^\circ 26' 6''$.

10. Calcula el área del triángulo que determinan la recta $x - 2y + 8 = 0$ y los ejes coordenados.

[Sol] $S = 16u^2$

11. Determina la mediatriz del segmento que tiene por extremos $A(1, 2)$ y $B(3, -1)$.

[Sol] $4x - 6y - 5 = 0$.

12. Calcula el baricentro y el ortocentro del triángulo de vértices $A(1, -1)$, $B(2, 3)$ y $C(-3, 2)$.

[Sol] Baricentro: $G\left(0, \frac{4}{3}\right)$; ortocentro $\left(\frac{11}{19}, \frac{21}{19}\right)$.

13. Calcula el baricentro y el circuncentro del triángulo de vértices $A(1, -1)$, $B(-3, 3)$ y $C(4,$

1). [Sol] Baricentro $G\left(\frac{2}{3}, 1\right)$; circuncentro $\left(\frac{7}{10}, \frac{27}{10}\right)$.

14. Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas $r: x + y - 1 = 0$ y $s: x - 2y - 5 = 0$.

Uno de sus vértices es el punto $A(1, -1)$. Halla los otros vértices.

[Sol] $B\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$; $C\left(\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ y $D\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Tipo III: Distancias

15. [S] Sea el triángulo de vértices $A(4, 2)$, $B(13, 5)$ y $C(6, 6)$.

a) Hallar la ecuación de la altura que pasa por el vértice C.

b) Calcular la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado AB.

[Sol] a) $3x + y - 24 = 0$; b) $2\sqrt{10}$

16. En el triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(-1, 4)$ y $C(0, 5)$ calcula:

a) la altura correspondiente al vértice C,

b) la ecuación de la mediatriz del lado AB,

c) su área.

[Sol] a) $\frac{10}{\sqrt{58}}$; b) $3x - 7y + 2 = 0$; c) $5 u^2$

17. Los puntos $A(-2, -2)$ y $B(1, 4)$ son vértices de un triángulo rectángulo en A. Determina el tercer vértice que está situado sobre la recta $x + y - 1 = 0$.

[Sol] $(8, -7)$