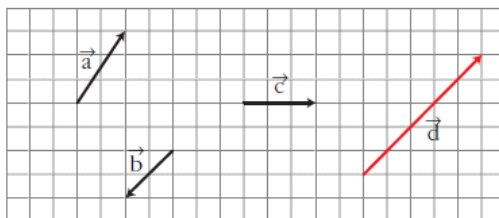


VECTORES

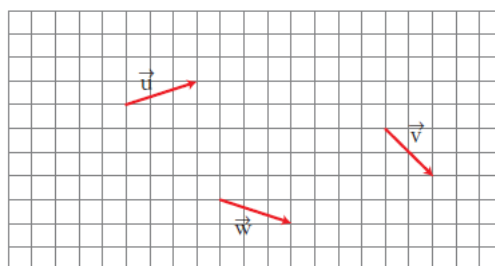
1.- DEFINICIÓN Y OPERACIONES

1. Copia en un papel cuadrículado los siguientes vectores:



Representa los vectores: $-2\vec{a}$, $3\vec{b}$ y $\frac{\vec{c}}{2}$ y expresa sus coordenadas.

2. Efectúa gráficamente:
 a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{b} + \vec{d}$
 y expresa dichas operaciones mediante coordenadas.
3. Efectúa gráficamente:
 a) $\vec{a} - \vec{b}$ b) $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$
 y expresa dichas operaciones mediante coordenadas.
4. Con los vectores de la figura:



Realiza las siguientes operaciones gráficamente y mediante coordenadas.

- a) $3\vec{u} + 2\vec{v}$ b) $\vec{u} - 2\vec{v}$ c) $\vec{a} - \vec{b}$ b) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}$

2.- BASES

5. Halla las coordenadas de los vectores \vec{u} , \vec{v} , $\vec{u}_1 = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u}_3 = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ y representa los vectores obtenidos.
 Solución: $\vec{u} = (1,0)$; $\vec{v} = (0,1)$; $\vec{u}_1 = (1,1)$, $\vec{u}_2 = (1,-1)$, $\vec{u}_3 = (3,-2)$
6. Comprueba que los vectores $(1, 1)$, $(1, 0)$ son linealmente independientes.
7. Demuestra que los vectores $(1, a)$ y $(0, b)$ son linealmente independientes para cualquier valor de a y $b \neq 0$.
8. Demuestra que los vectores (a, b) y (c, d) son linealmente independientes si y solo si $ad - bc \neq 0$.
9. Determina los valores a y b para que el vector $(1, a)$ sea combinación lineal de $(1, b)$ y $(1, 2)$.
 Solución: $b \neq 2$, $a \in \mathbf{R}$.
10. Halla el vector \vec{w} tal que $\vec{u} = 3\vec{v} - 2\vec{w}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (1, 1)$.
 Solución: $a = 1$, $b = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$.
11. Halla el vector \vec{w} tal que $\vec{u} = \vec{v} - 2\vec{w}$, siendo $\vec{u} = (2, 2)$ y $\vec{v} = (1/2, 1/1)$.
 Solución: $a = 1$, $b = 1$, $a, b \in \mathbf{R}$.

2.- SISTEMAS DE REFERENCIA

12. Dados los puntos $A = (1, 2)$, $B = (-1, 3)$, $C = (3, 4)$ y $D = (1, 0)$ halla las coordenadas de los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DA} y \overrightarrow{AC} .
Solución: $\overrightarrow{AB} = (-2, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (4, 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-2, -4)$, $\overrightarrow{DA} = (0, 2)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, 2)$
13. Dado el vector $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ y el punto $A = (3, 1)$, halla las coordenadas del punto B.
Solución: $B = (5, 2)$.
14. Dado el vector $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ y el punto $B = (5, -3)$, halla las coordenadas del punto A.
Solución: $A = (3, -6)$
15. Dados los puntos $A = (1, 2)$, $B = (-1, 3)$, $C = (3, 4)$ y $D = (1, 0)$ Halla el punto medio de los segmentos AB, BC, CD, DA, AC.
Solución: Son respectivamente $M = \left(0, \frac{5}{2}\right)$, $N = \left(1, \frac{7}{2}\right)$, $O = (2, 2)$, $P = (1, 1)$ y $Q = (2, 3)$.
16. Halla el punto simétrico de $A = (-5, 2)$ respecto del punto $B = (1, -1)$.
Solución: $A' = (7, -4)$.
17. Halla el punto simétrico de $A = (1, 2)$ respecto del punto $B = (2, 3)$.
Solución: $A' = (3, 4)$.
18. Halla si están alineados los puntos $A = (3, 1)$, $B = (4, 4)$ y $C = (5, 7)$.
Solución: Sí lo están.
19. Halla si están alineados los puntos $A = (3, 1)$, $B = (4, 6)$ y $C = (5, 9)$.
Solución: No lo están.
20. Dados los puntos $A = (2, 3)$ y $B = (1, -2)$ halla los puntos que dividen al segmento en tres partes iguales.
Solución: $M = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y $N = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
21. Sean $A = (-3, 5)$, $B = (7, 2)$ y $C = (5, 6)$ los vértices de un triángulo. Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo.
Solución: Baricentro $G = \left(3, \frac{13}{3}\right)$
22. Sean $A = (1, -3)$, $B = (0, 7)$ y $C = (-1, 5)$ los vértices de un triángulo. Calcula las coordenadas de los puntos medios de cada lado y del baricentro del triángulo.
Solución: Punto medios de AB: $M = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, BC: $N = \left(-\frac{1}{2}, 6\right)$ y AC: $O = (0, 1)$.
Baricentro: $G = (0, 3)$
23. De un paralelogramo ABCD se conocen dos vértices consecutivos $A = (1, 1)$ y $B = (2, 2)$ y el centro $M = (3, 0)$, determina las coordenadas de los otros dos vértices C y D.
Solución: $C = (5, -1)$ y $D = (4, -2)$.

3.- PRODUCTO ESCALAR

24. Sean \vec{u}_1 , \vec{u}_2 dos vectores tales que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2|$ y $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$. Comprueba que los vectores $\vec{u} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$ y $\vec{v} = -y\vec{u}_1 + x\vec{u}_2$ son ortogonales:.

25. Sea $B = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2 \}$ una base ortonormal. Calcula el valor de k para que los vectores: $\bar{u} = \frac{1}{2}\bar{u}_1 + k\bar{u}_2$ y $\bar{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{u}_1 + m\bar{u}_2$ sean unitarios.
Solución: $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
26. Sea $B = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2 \}$ una base tal que $|\bar{u}_1| = |\bar{u}_2| = 1$ y $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 60^\circ$. Calcula el módulo del vector $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$.
Solución: $|\bar{u}| = \sqrt{3}$
27. Sea $B = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2 \}$ una base ortonormal y sean los vectores: $[\overrightarrow{OA}] = 3\bar{u}_1 + \bar{u}_2, [\overrightarrow{OB}] = 2\bar{u}_1 + 5\bar{u}_2, [\overrightarrow{OC}] = 7\bar{u}_1$. Demuestra que el triángulo ABC es isósceles y calcula su perímetro.
Solución: Su perímetro es $2\sqrt{17} + 5\sqrt{2}$, Los lados AB y AC miden lo mismo $\sqrt{17}$.
28. ¿Qué ángulo forman los vectores $\bar{u} = 2\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2$ y $\bar{v} = 4\bar{u}_1 - 5\bar{u}_2$ sabiendo que $B = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2 \}$ es una base ortonormal.
Solución: $\arccos\left(\frac{23}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{41}}\right)$
29. Dados los vectores $\bar{u} = (2, a)$ y $\bar{v} = (b, -2)$ determina los valores de a y b tales que hacen que \bar{u} y \bar{v} sean ortogonales y $|\bar{u}| = |\bar{v}|$.
Solución: $a = b$.
30. Dados los vectores $\bar{u} = (2, 0), \bar{v} = (0, 1)$ y $\bar{w} = a\bar{u} + b\bar{v}$, ¿qué relación deben satisfacer a y b para que el módulo de \bar{w} sea la unidad?
Solución: $4a^2 + b^2 = 1$.
31. Halla la proyección ortogonal de \overrightarrow{AB} sobre \overrightarrow{CD} , si $A = (1,2), B = (-2,0), C = (2,3)$ y $D = (-1,1)$.
Solución: Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\text{proy}_{\overrightarrow{CD}} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.
32. ¿Son unitarios los vectores $\bar{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \bar{v} = \left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ y $\bar{w} = (1, 1)$?
Solución: No lo es \bar{w} , sí los demás.
33. Demuestra que las dos diagonales de un rombo son perpendiculares.
34. Sean los vectores $\bar{u} = (1,-1)$ y $\bar{v} = (2, m)$ halla m de forma que:
 a) \bar{u} y \bar{v} sean ortogonales.
 b) \bar{u} y \bar{v} tengan la misma dirección.
Solución: a) $m = 2$, b) $m = -2$,
35. Sean los vectores $\bar{u} = (1,-1)$ y $\bar{v} = (2, m)$ halla m de forma que:
 a) \bar{v} sea unitario.
 b) $(\bar{u}, \bar{v}) = 45^\circ$.
Solución: a) sin solución real., b) $m = 0$