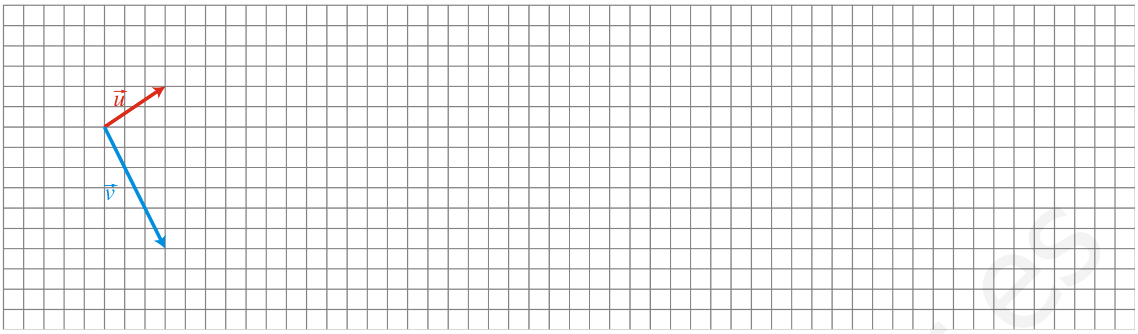
Vectores

Ejercicio nº 1.-

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los siguientes vectores, dibuja $2\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\vec{v}$ y $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

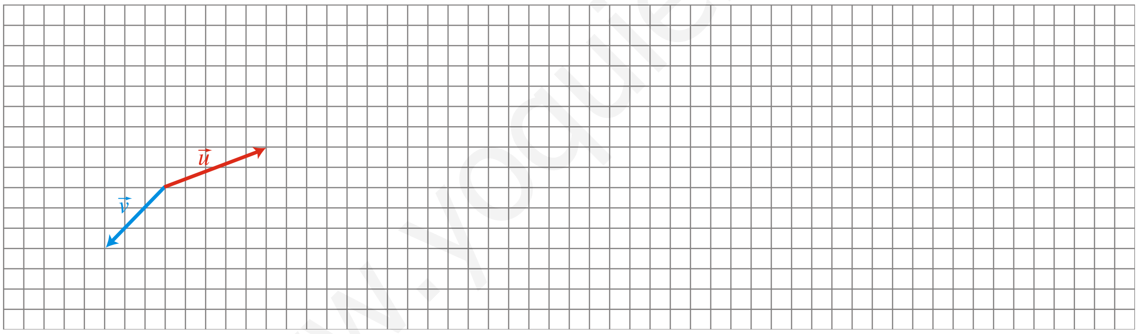


b) Las coordenadas de dos vectores son $\vec{a}(2,\ -3)$ y $\vec{b}\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$. Obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+2\vec{b};\quad -\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b};\quad \frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

Ejercicio nº 2.-

a) Dibuja los vectores $\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ y $2\vec{u}+3\vec{v}$, siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los que muestra la figura:

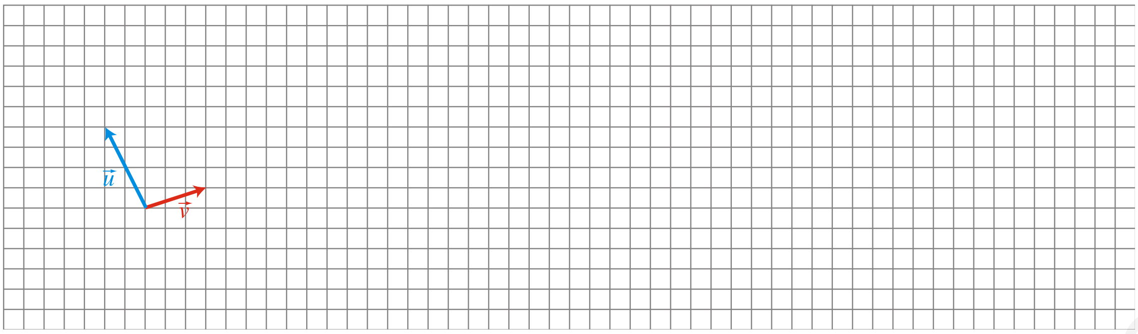


b) Dados los vectores $\vec{a}\left(\frac{2}{3},\ -1\right)$ y $\vec{b}\,(3,-2)$, obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+2\vec{b};\quad 2\vec{a}-\vec{b};\quad \vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$$

Ejercicio nº 3.-

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores que muestra la figura, dibuja $-\vec{u}+2\vec{v}$, $\frac{2}{3}\vec{u}+\vec{v}$ y $-\frac{1}{3}\vec{u}-\vec{v}$:

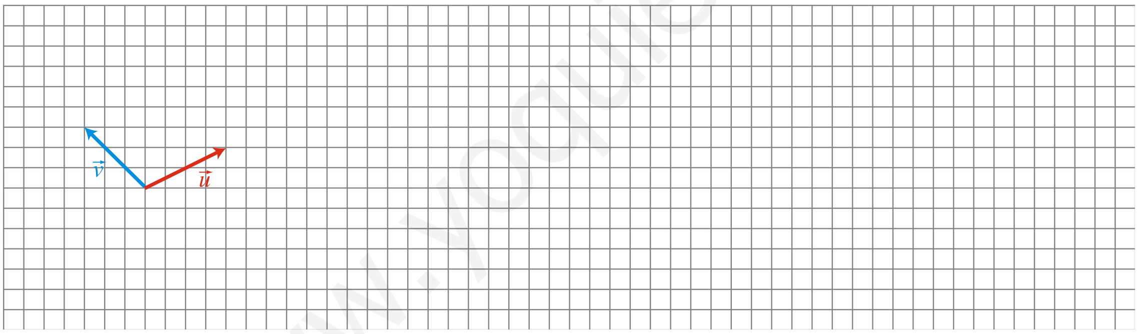


b) Si las coordenadas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son $\left(\frac{2}{5},\ -3\right)$ y $(-1,3)$, obtén las coordenadas de los vectores:

$$5\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b};\quad -\vec{a}+2\vec{b};\quad \frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$$

Ejercicio nº 4.-

a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los que muestra la figura. A partir de ellos, dibuja $-\vec{u}-\vec{v}$, $-2\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}$:



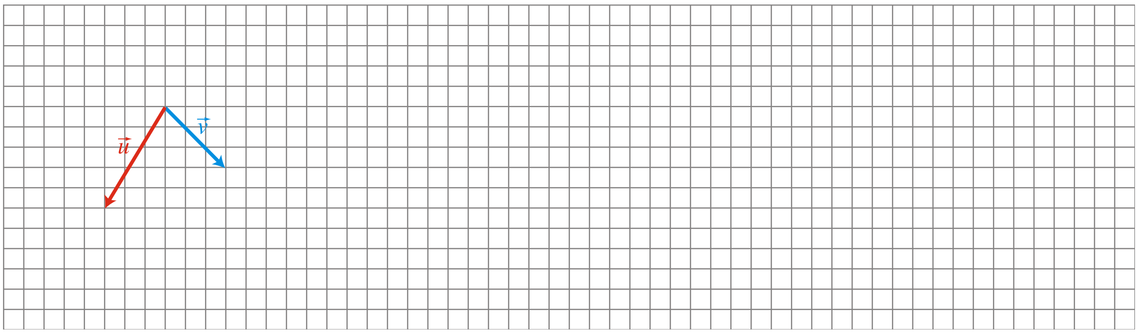
b) Si las coordenadas de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son $(-2,\ 1)$ y $\left(1,\ -\frac{1}{4}\right)$, obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+4\vec{b};\quad -\vec{a}+\vec{b};\quad \frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$$

Ejercicio nº 5.-

a) **A la vista de la siguiente figura, dibuja los vectores:**

$$-\vec{u}+2\vec{v}; \quad \vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}; \quad \vec{u}-2\vec{v}$$

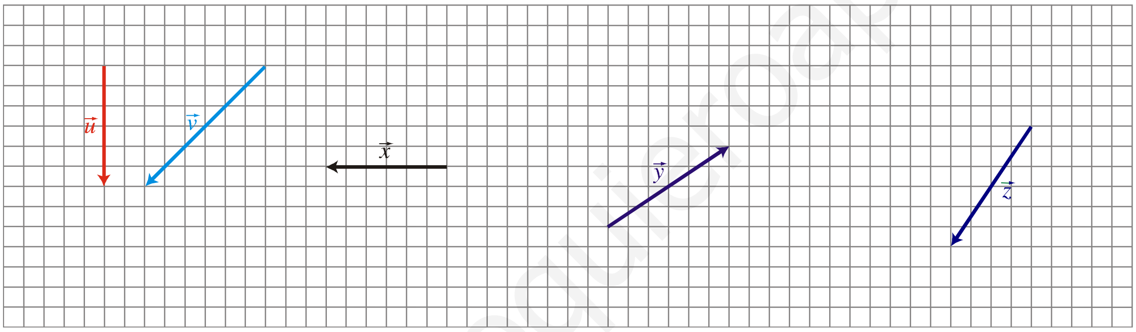


b) Dados los vectores $\vec{a}\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)$ **y** $\vec{b}\,(2,\ -2)$, **obtén las coordenadas de:**

$$\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}; \quad -2\vec{a}+\vec{b}; \quad -4\vec{a}+\vec{b}$$

Ejercicio nº 6.-

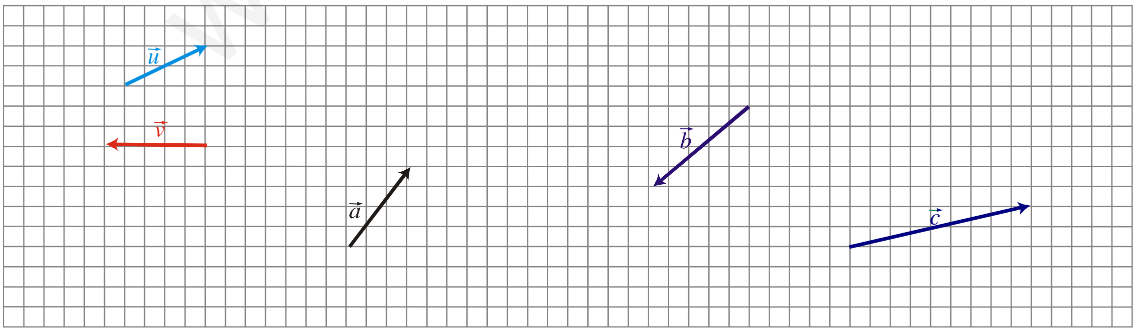
a) **Escribe los vectores** $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ **como combinación lineal de** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$:



b) Escribe el vector $\vec{a}\,(0,\ 17)$ **com combinación lineal de** $\vec{b}\left(\frac{1}{5},\ 3\right)$ **y** $\vec{c}\,(-1,\ 2)$.

Ejercicio nº 7.-

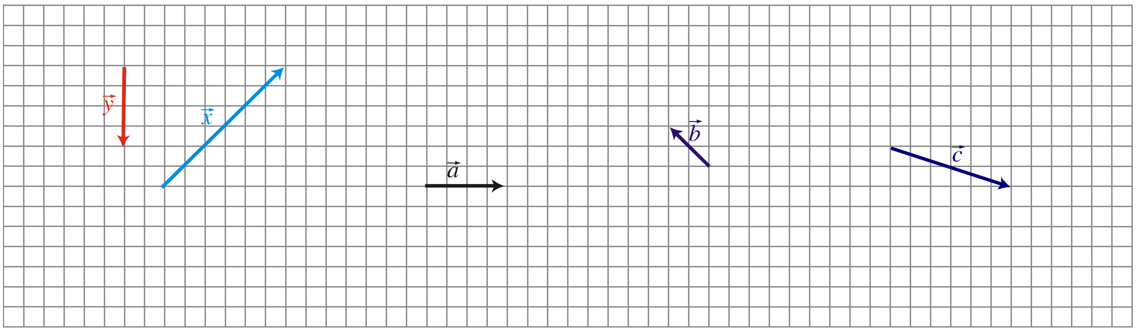
a) **Expresa los vectores** $\vec{a},\ \vec{b}$ **y** $\vec{c}$ **como combinación lineal de los vectores** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$:



b) Expresa el vector $\vec{x}\,(5,-2)$ **como combinación lineal de** $\vec{y}\,(1,\ -2)$ **y** $\vec{z}\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$.

Ejercicio nº 8.-

a) Escribe los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

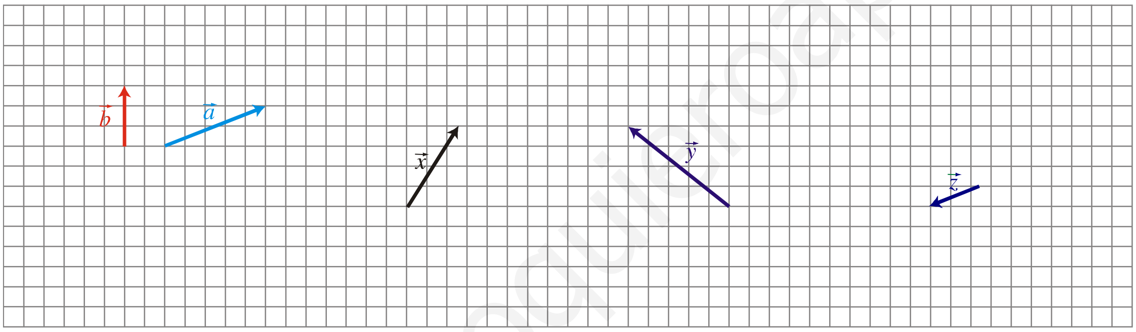


b) Halla las coordenadas del vector $\vec{w}\,(1,\ 0)$ con respecto a la base formada por $\vec{u}\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ y $\vec{v}\,(-3,\ 2)$

Ejercicio nº 9.-

a) Halla las coordenadas del vector $\vec{u}\,(-2,-3)$ con respecto a la base formada por los vectores $\vec{v}\left(2,-\dfrac{1}{3}\right)$ y $\vec{w}\,(1,-1)$

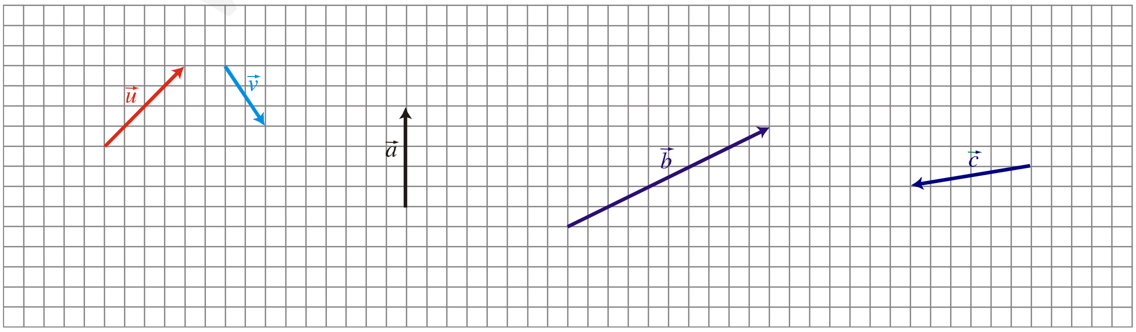
b) Expresa los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:



Ejercicio nº 10.-

a) Expresa el vector $\vec{x}\,(4,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{y}\,(2,-3)$ y $\vec{z}\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

b) Escribe los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



Ejercicio nº 11.-

Dados $\vec{x}(5,\,-4),\ \vec{y}(3,\,2)$ **y** $\vec{z}(1,\,k)$**:**

a) Halla el valor de k **para que** $\vec{x}$ **y** $\vec{z}$ **formen un ángulo** 90°**.**

b) Halla un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{x}$**.**

Ejercicio nº 12.-

Si $\vec{a}(1,\,-3)$ **y** $\vec{b}(m,\,2)$**:**

a) Halla el valor de m **para que** $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$ **sean perpendiculares.**

b) Calcula el ángulo formado por $\vec{a}$ **y** $\vec{c}$ **siendo** $\vec{c}(4,\,2)$.

Ejercicio nº 13.-

Dados los vectores $\vec{u}(-1,\,4), \vec{v}(3,\,m)$ **y** $\vec{w}(2,\,-3)$:

a) Calcula m **para que** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **sean perpendiculares.**

b) Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ **y** $\vec{w}$.

Ejercicio nº 14.-

Considera los vectores $\vec{x}(a,\,3)$ **e** $\vec{y}(-1,\,b)$**. Halla los valores de** a **y** b **para que** $\vec{x}$ **e** $\vec{y}$ **sean perpendiculares y que** $|\vec{x}| = 5$**.**

Ejercicio nº 15.-

a) Halla el ángulo que forman los vectores

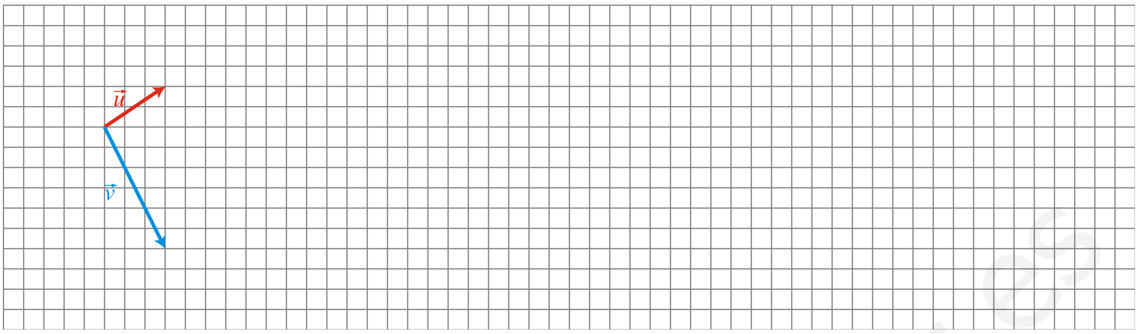
$$\vec{a}\left(\frac{3}{5},\frac{-4}{5}\right) \text{ y } \vec{b}(1,\,1)$$

b) ¿Cuál sería el valor de x **para que el vector** $\vec{u}(1,\,x)$ **fuera perpendicular a** $\vec{a}\left(\frac{3}{5},\frac{-4}{5}\right)$**?**

Soluciones ejercicios de Vectores

Ejercicio nº 1.-

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los siguientes vectores, dibuja $2\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\vec{v}$ y $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

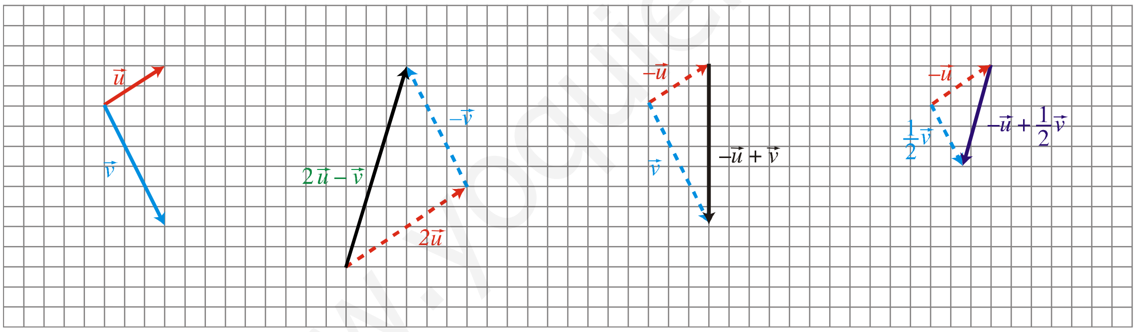


b) Las coordenadas de dos vectores son $\vec{a}(2,\ -3)$ y $\vec{b}\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$. Obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+2\vec{b};\quad -\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b};\quad \frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

Solución:

a)



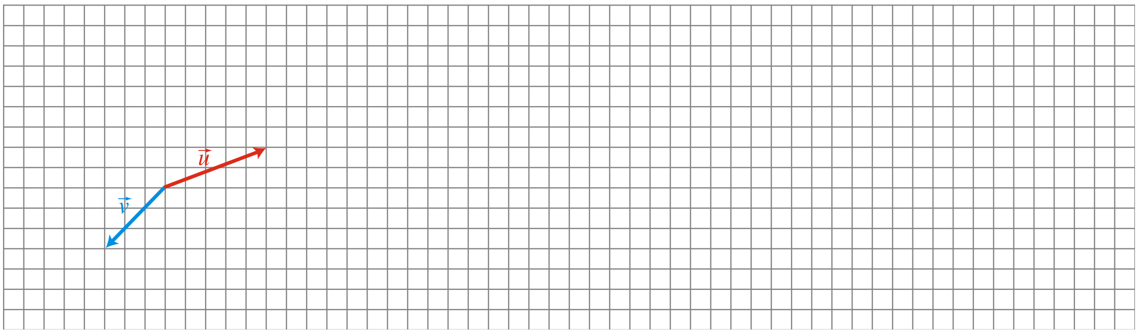
b) $-3\vec{a}+2\vec{b}=-3(2,\ -3)+2\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)=(-6,\ 9)+(-1,\ 4)=(-7,\ 13)$

$$-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=-(2,\ -3)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)=(-2,\ 3)+\left(-\frac{1}{4},\ 1\right)=\left(\frac{-9}{4},\ 4\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\left[(2,\ -3)-\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2},\ -5\right)=\left(\frac{5}{6},\ \frac{-5}{3}\right)$$

Ejercicio nº 2.-

a) Dibuja los vectores $\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ y $2\vec{u}+3\vec{v}$, siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los que muestra la figura:

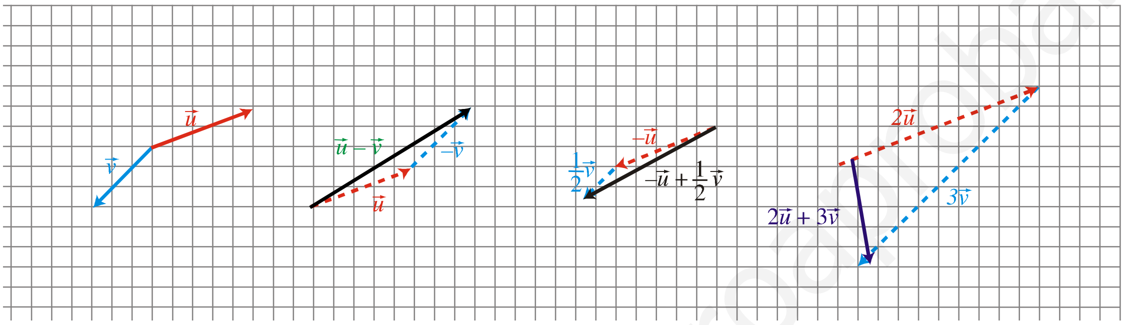


b) Dados los vectores $\vec{a}\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ y $\vec{b}(3, -2)$, obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+2\vec{b}; \quad 2\vec{a}-\vec{b}; \quad \vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$$

Solución:

a)



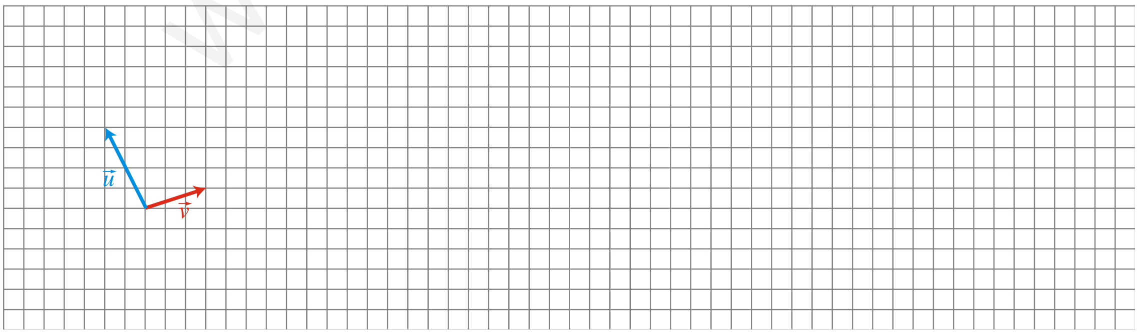
b) $-3\vec{a}+2\vec{b} = -3\left(\frac{2}{3}, -1\right)+2(3, -2) = (-2, 3)+(6, -4) = (4, -1)$

$2\vec{a}-\vec{b} = 2\left(\frac{2}{3}, -1\right)-(3, -2) = \left(\frac{4}{3}, -2\right)-(3, -2) = \left(\frac{-5}{3}, 0\right)$

$\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b} = \left(\frac{2}{3}, -1\right)-\frac{1}{3}(3, -2) = \left(\frac{2}{3}, -1\right)-\left(1, \frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores que muestra la figura, dibuja $-\vec{u}+2\vec{v}$, $\frac{2}{3}\vec{u}+\vec{v}$ y $-\frac{1}{3}\vec{u}-\vec{v}$:

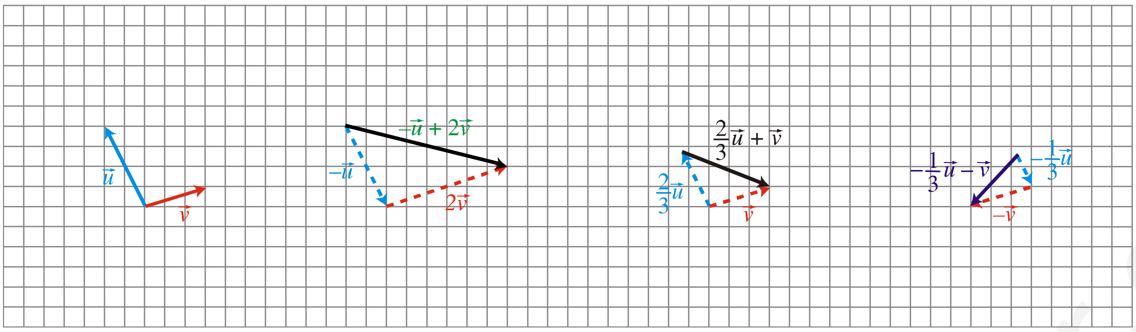


b) Si las coordenadas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son $\left(\frac{2}{5},\ -3\right)$ y $(-1,3)$, obtén las coordenadas de los vectores:

$$5\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b};\quad -\vec{a}+2\vec{b};\quad \frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$$

Solución:

a)



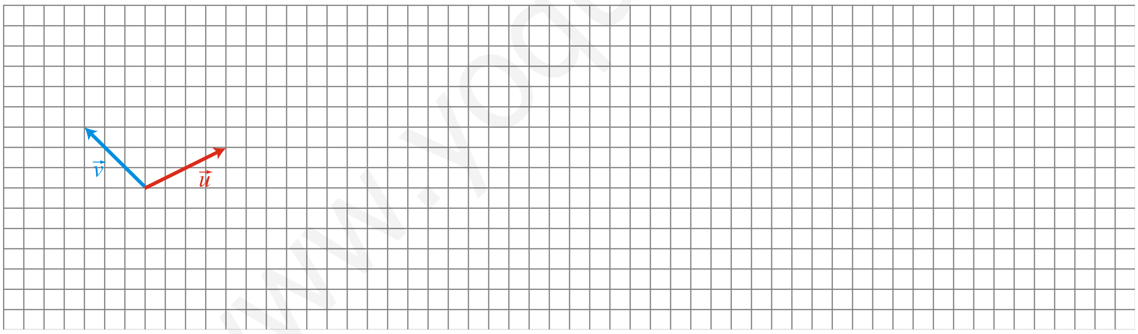
b) $5\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}=5\left(\frac{2}{5},\ -3\right)+\frac{1}{5}(-1,\ 3)=(2,\ -15)+\left(\frac{-1}{5},\ \frac{3}{5}\right)=\left(\frac{9}{5},\ \frac{-72}{5}\right)$

$-\vec{a}+2\vec{b}=-\left(\frac{2}{5},\ -3\right)+2(-1,\ 3)=\left(-\frac{2}{5},\ 3\right)+(-2,\ 6)=\left(\frac{-12}{5},\ 9\right)$

$\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5},\ -3\right)-(-1,\ 3)=\left(\frac{1}{5},\ \frac{-3}{2}\right)-(-1,\ 3)=\left(\frac{6}{5},\ \frac{-9}{2}\right)$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los que muestra la figura. A partir de ellos, dibuja $-\vec{u}-\vec{v}$, $-2\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}$:

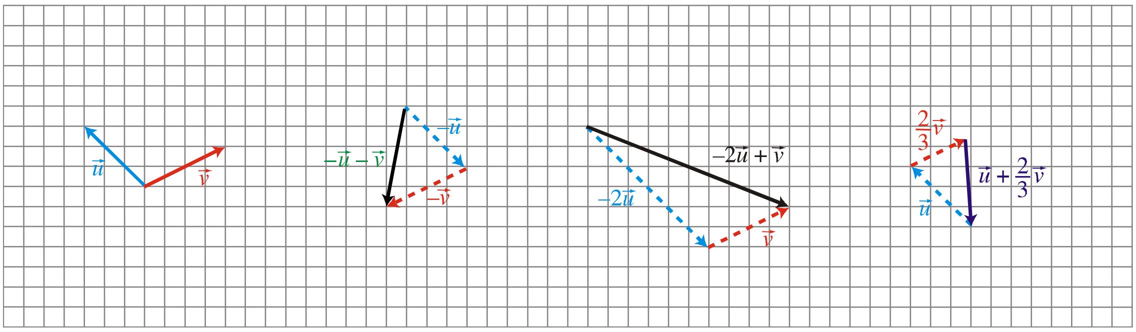


b) Si las coordenadas de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son $(-2,\ 1)$ y $\left(1,\ -\frac{1}{4}\right)$, obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+4\vec{b};\quad -\vec{a}+\vec{b};\quad \frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$$

Solución:

a)



b) $-3\vec{a}+4\vec{b} = -3(-2,\ 1)+4\left(1,\ \frac{-1}{4}\right) = (6,\ -3)+(4,\ -1) = (10,\ -4)$

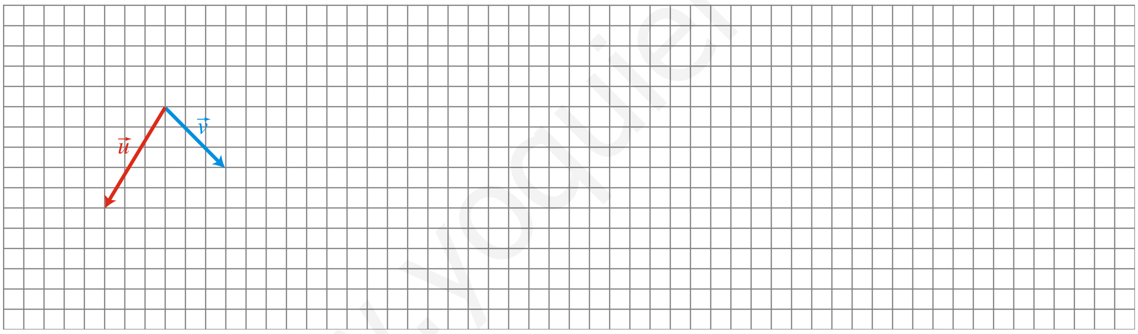
$-\vec{a}+\vec{b} = -(-2,\ 1)+\left(1,\ \frac{-1}{4}\right) = (2,\ -1)+\left(1,\ \frac{-1}{4}\right) = \left(3,\ \frac{-5}{4}\right)$

$\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b} = \frac{1}{2}(-2,\ 1)+2\left(1,\ \frac{-1}{4}\right) = \left(-1,\ \frac{1}{2}\right)+\left(2,\ \frac{-1}{2}\right) = (1,\ 0)$

Ejercicio nº 5.-

a) A la vista de la siguiente figura, dibuja los vectores:

$$-\vec{u}+2\vec{v};\quad \vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v};\quad \vec{u}-2\vec{v}$$

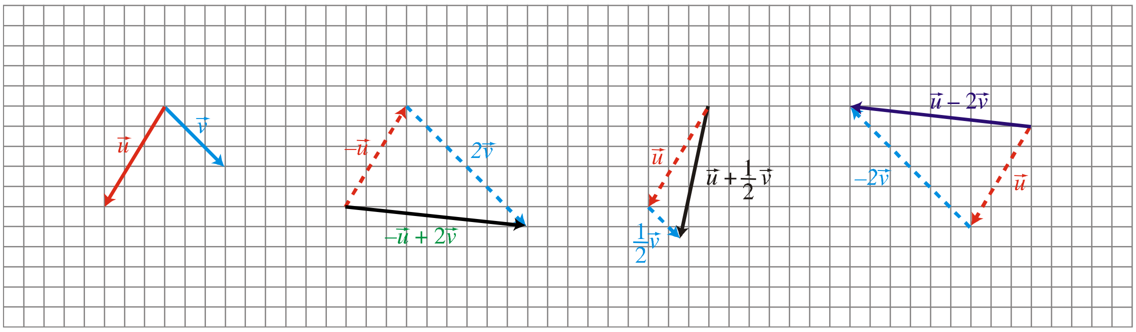


b) Dados los vectores $\vec{a}\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)$ y $\vec{b}\,(2,\ -2)$, obtén las coordenadas de:

$$\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b};\quad -2\vec{a}+\vec{b};\quad -4\vec{a}+\vec{b}$$

Solución:

a)



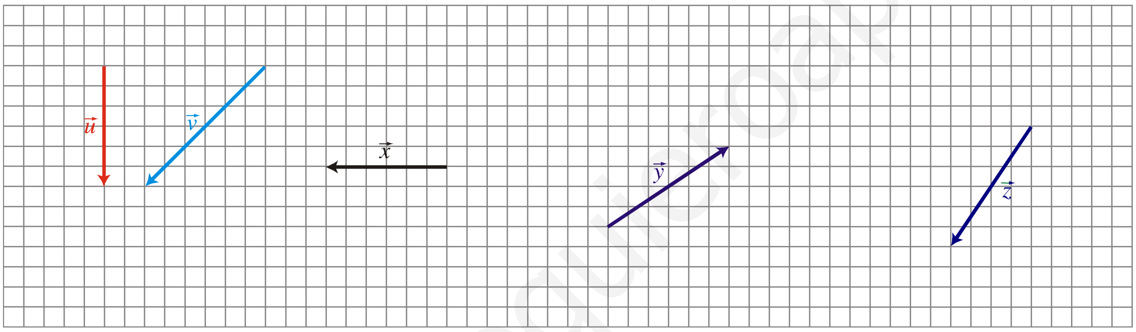
b) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)-\frac{1}{2}(2,\ -2)=\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)-(1,\ -1)=\left(\frac{-7}{4},\ 3\right)$

$-2\vec{a}+\vec{b}=-2\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)+(2,\ -2)=\left(\frac{3}{2},\ -4\right)+(2,\ -2)=\left(\frac{7}{2},\ -6\right)$

$-4\vec{a}+\vec{b}=-4\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)+(2,\ -2)=(3,\ -8)+(2,\ -2)=(5,\ -10)$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

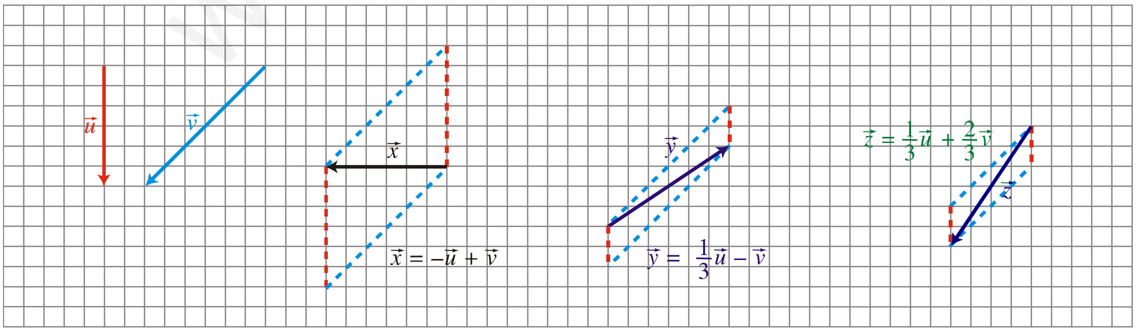
a) Escribe los vectores $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



b) Escribe el vector $\vec{a}\,(0,\ 17)$ com combinación lineal de $\vec{b}\left(\frac{1}{5},\ 3\right)$ y $\vec{c}\,(-1,\ 2)$.

Solución:

a)



b) Tenemos que encontrar dos números, m y n, tales que:

$\vec{a}=m\cdot\vec{b}+n\cdot\vec{c}$, es decir:

$$(0,\ 17) = m \cdot \left(\frac{1}{5},\ 3\right) + n \cdot (-1,\ 2)$$

$$(0,\ 17) = \left(\frac{m}{5},\ 3m\right) + (-n,\ 2n)$$

$$(0,\ 17) = \left(\frac{m}{5} - n,\ 3m + 2n\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \dfrac{m}{5} - n \\ 17 = 3m + 2n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 0 = m - 5n \\ 17 = 3m + 2n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 5n = m \\ 17 = 15n + 2n \ \rightarrow \ 17 = 17n \ \rightarrow \ n = 1 \end{array}$$

$$m = 5n = 5$$

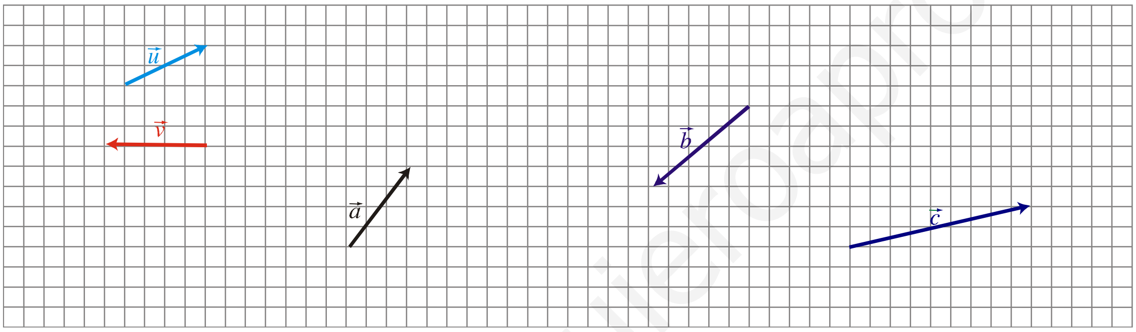
Por tanto:

$\vec{a} = 5 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c}$, es decir:

$$(0,\ 17) = 5\left(\frac{1}{5},\ 3\right) + (-1,\ 2)$$

Ejercicio nº 7.-

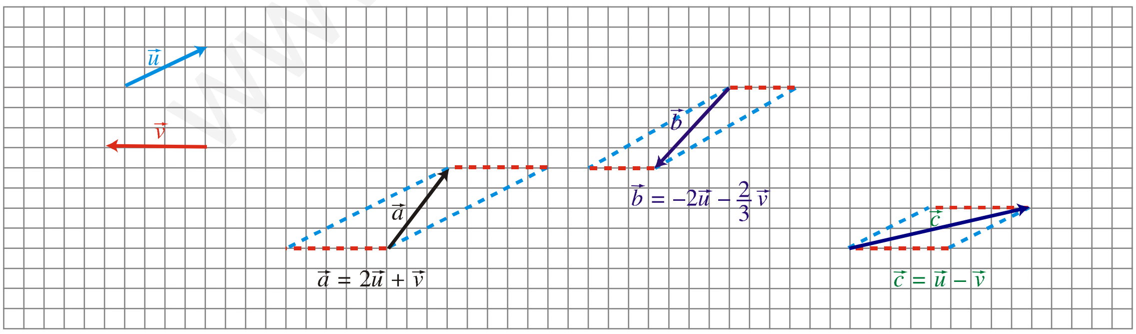
a) Expresa los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



b) Expresa el vector $\vec{x}\,(5, -2)$ como combinación lineal de $\vec{y}\,(1,\ -2)$ y $\vec{z}\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$.

Solución:

a)



b) Hemos de encontrar dos números, m y n, tales que:

$\vec{x} = m \cdot \vec{y} + n \cdot \vec{z}$, es decir:

$$(5,\ -2)=m\,(1,\ -2)+n\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$$

$$(5,\ -2)=(m,\ -2m)+\left(\frac{n}{2},\ 2n\right)$$

$$(5,\ -2)=\left(m+\frac{n}{2},\ -2m+2n\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 5=m+\dfrac{n}{2} \\ -2=-2m+2n \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} 10=2m+n \\ -2=-2m+2n \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} n=10-2m \\ -1=-m+n \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} n=10-2m \\ n=-1+m \end{array}\right\}$$

$$10-2m=-1+m\ \rightarrow -2m-m=-1-10\ \rightarrow\ -3m=-11\ \rightarrow m=\frac{11}{3};\quad n=-1+m=-1+\frac{11}{3}=\frac{8}{3}$$

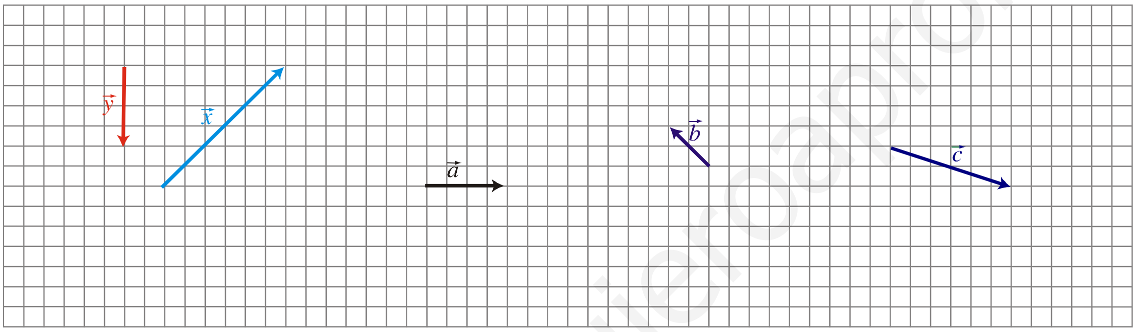
Por tanto:

$$\vec{x}=\frac{11}{3}\vec{y}+\frac{8}{3}\vec{z},\ \text{es decir:}$$

$$(5,\ -2)=\frac{11}{3}(1,\ -2)+\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$$

Ejercicio nº 8.-

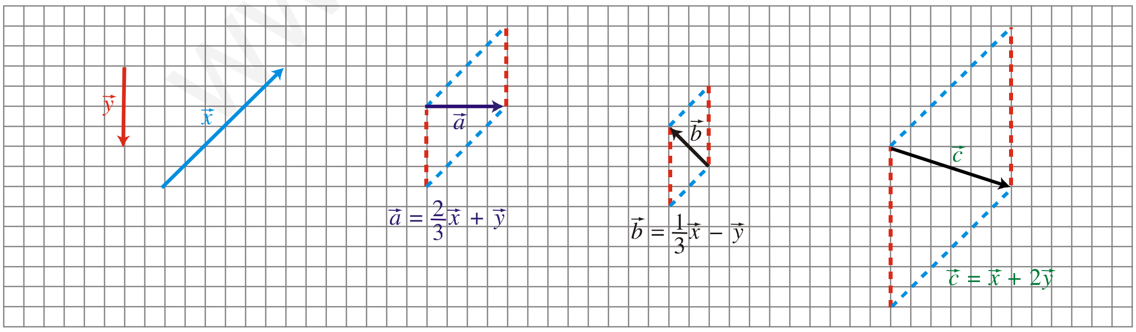
a) Escribe los vectores $\vec{a},\ \vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$:



b) Halla las coordenadas del vector $\vec{w}\,(1,\ 0)$ con respecto a la base formada por $\vec{u}\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ y $\vec{v}\,(-3,\ 2)$

Solución:

a)



b) Tenemos que hallar dos números, *m* y *n*, tales que:

$$\vec{w}=m\cdot\vec{u}+n\cdot\vec{v},\ \text{es decir:}$$

$$(1,\ 0) = m\left(-\frac{1}{2},\ 1\right) + n(-3,\ 2)$$

$$(1,\ 0) = \left(-\frac{m}{2},\ m\right) + (-3n,\ 2n)$$

$$(1,\ 0) = \left(-\frac{m}{2} - 3n,\ m + 2n\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -\dfrac{m}{2} - 3n \\ 0 = m + 2n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2 = -m - 6n \\ -2n = m \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2 = 2n - 6n \\ 2 = -4n \quad \to \quad n = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

$m = -2n = 1$

Por tanto:

$\vec{w} = 1 \cdot \vec{u} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \vec{v}$, es decir:

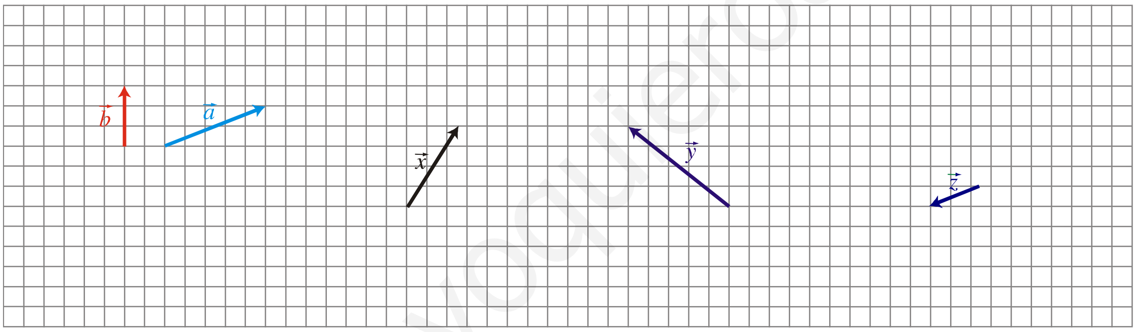
$$(1,\ 0) = \left(-\frac{1}{2},\ 1\right) - \frac{1}{2}(-3,\ 2)$$

Las coordenadas de $\vec{w}$ respecto a la base formada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son: $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$

<u>Ejercicio nº 9.-</u>

a) Halla las coordenadas del vector $\vec{u}(-2,-3)$ con respecto a la base formada por los vectores $\vec{v}\left(2,-\frac{1}{3}\right)$ y $\vec{w}(1,-1)$

b) Expresa los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:



Solución:

a) Hemos de hallar dos números, m y n, tales que:

$\vec{u} = m \cdot \vec{v} + n \cdot \vec{w}$, es decir:

$$(-2,\ -3) = m \cdot \left(2,\ -\frac{1}{3}\right) + n \cdot (1,\ -1)$$

$$(-2,\ -3) = \left(2m,\ -\frac{m}{3}\right) + (n,\ -n)$$

$$(-2,\ -3) = \left(2m + n,\ -\frac{m}{3} - n\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} -2 = 2m + n \\ -3 = \dfrac{-m}{3} - n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2 = 2m + n \\ -9 = -m - 3n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2 - 2m = n \\ -9 = -m - 3(-2 - 2m) \end{array}\right\}$$

$-9 = -m + 6 + 6m \quad \to \quad -9 - 6 = -m + 6m \quad \to \quad -15 = 5m \quad \to \quad m = -3$

$n = -2 - 2m = -2 + 6 = 4$

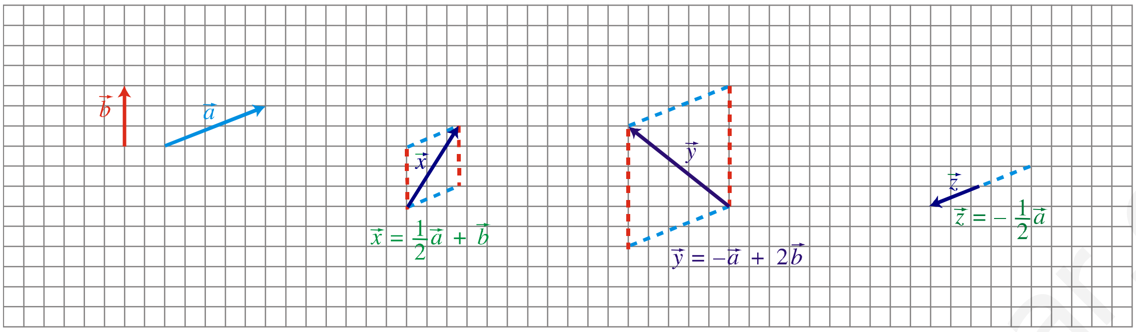
Por tanto:

$\vec{u} = -3\vec{v} + 4\vec{w}$, es decir:

$$(-2,\ -3) = -3\left(2,\ -\frac{1}{3}\right) + 4(1,\ -1)$$

Las coordenadas de $\vec{u}$ con respecto a la base formada por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $(-3,\ 4)$.

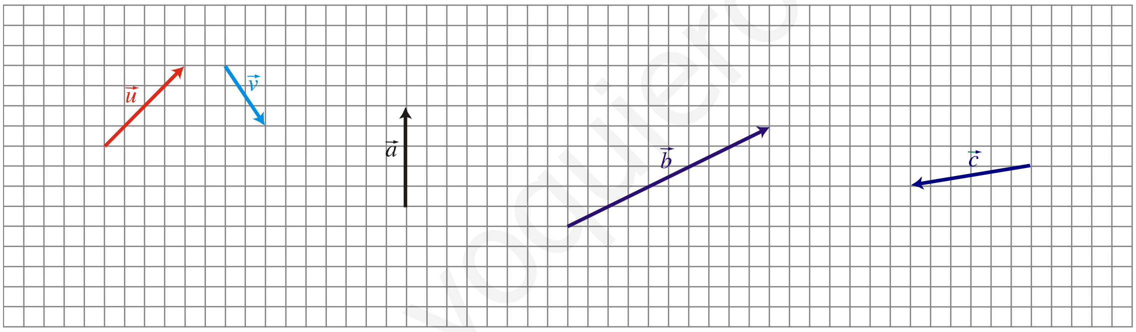
b)



<u>Ejercicio nº 10.-</u>

a) Expresa el vector $\vec{x}\,(4,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{y}\,(2,-3)$ y $\vec{z}\left(\frac{1}{2},1\right)$.

b) Escribe los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



Solución:

a) Tenemos que hallar dos números, m y n, tales que:

$$\vec{x} = m \cdot \vec{y} + n \cdot \vec{z}, \text{ es decir:}$$

$$(4,\ 1) = m(2,\ -3) + n\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$$

$$(4,\ 1) = (2m,\ -3m) + \left(\frac{n}{2},\ n\right)$$

$$(4,\ 1) = \left(2m + \frac{n}{2},\ -3m + n\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4 = 2m + \frac{n}{2} \\ 1 = -3m + n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 8 = 4m + n \\ 1 = -3m + n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 8 - 4m = n \\ 1 + 3m = n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 8 - 4m = 1 + 3m \\ 8 - 1 = 3m + 4m \end{array}\right\}$$

$7 = 7m \quad \rightarrow \quad m = 1$

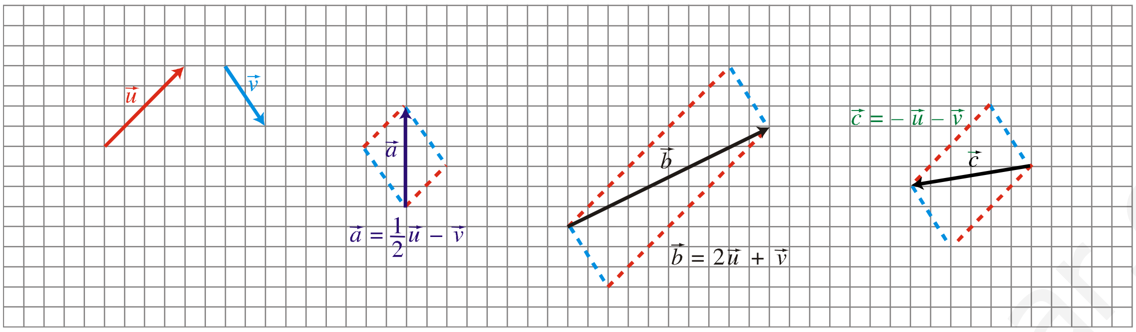
$n = 1 + 3m = 1 + 3 = 4$

Por tanto:

$\vec{x} = 1 \cdot \vec{y} + 4 \cdot \vec{z}$; es decir:

$(4,\ 1) = (2,\ -3) + 4\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

b)



<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Dados $\vec{x}(5,\ -4)$, $\vec{y}(3,\ 2)$ y $\vec{z}(1,\ k)$:

a) Halla el valor de k para que $\vec{x}$ y $\vec{z}$ formen un ángulo 90°.

b) Halla un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{x}$.

Solución:

a) Para que $\vec{x}$ y $\vec{z}$ formen un ángulo de 90° (sean perpendiculares), su producto escalar ha de ser igual a cero:

$$\vec{x} \cdot \vec{z} = (5,\ -4) \cdot (1,\ k) = 5 - 4k = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{5}{4}$$

b) Hallamos el módulo de $\vec{x}$

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

El vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{x}$ será:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{41}},\ \frac{-4}{\sqrt{41}}\right)$$

<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Si $\vec{a}(1,\ -3)$ y $\vec{b}(m,\ 2)$:

a) Halla el valor de m para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares.

b) Calcula el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{c}$ siendo $\vec{c}(4,\ 2)$.

Solución:

a) Para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, -3) \cdot (m, 2) = m - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad m = 6$$

b) $$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|} = \frac{(1,3) \cdot (4,2)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{4-6}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-2}{\sqrt{200}} =$$

$$= -0{,}14 \quad \rightarrow \quad \left(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}\right) = 98^\circ 7' 48''$$

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Dados los vectores $\vec{u}\,(-1,\ 4)$, $\vec{v}\,(3,\ m)$ y $\vec{w}\,(2,\ -3)$:

a) Calcula m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

Solución:

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero, es decir:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1,\ 4) \cdot (3,\ m) = -3 + 4m = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{3}{4}$$

b) $$\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{w}\right|} = \frac{-2-12}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{-14}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-14}{\sqrt{221}} = -0{,}94$$

Así, $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}\right) = 160^\circ 20' 46''$.

<u>Ejercicio nº 14.-</u>

Considera los vectores $\vec{x}\,(a, 3)$ e $\vec{y}\,(-1, b)$. Halla los valores de a y b para que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean perpendiculares y que $|\vec{x}| = 5$.

Solución:

1.º) Para que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero, es decir:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (a, 3) \cdot (-1, b) = -a + 3b = 0 \quad \rightarrow \quad b = \frac{a}{3}$$

2.º) Hallamos el módulo de $\vec{x}$ e igualamos a 5:

$$|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + 3^2} = \sqrt{a^2 + 9} = 5 \quad \rightarrow \quad a^2 + 9 = 25$$

$$a^2 = 25 - 9 = 16 \quad \rightarrow \quad a = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \quad \rightarrow \quad b = \dfrac{4}{3} \\ a = -4 \quad \rightarrow \quad b = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Por tanto, hay dos posibilidades:

$$a_1 = 4,\ b_1 = \frac{4}{3};\ a_2 = -4,\ b_2 = -\frac{4}{3}$$

<u>Ejercicio nº 15.-</u>

a) Halla el ángulo que forman los vectores

$$\vec{a}\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) \text{ y } \vec{b}(1, 1)$$

b) ¿Cuál sería el valor de x para que el vector $\vec{u}\,(1,\ x)$ fuera perpendicular a $\vec{a}\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$?

Solución:

a) $$cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{-\frac{1}{5}}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} = -0{,}14 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}\right) = 98^\circ 7' 48''$$

b) Para que $\vec{u}$ y $\vec{a}$ sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = (1,\ x) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) = \frac{3}{5} - \frac{4x}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad 3 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{4}$$