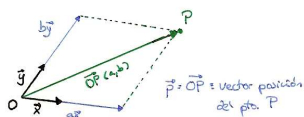


Geometría Analítica

Sistema de Referencia

Conjunto formado por un punto fijo denominado origen (O), y una base $(\vec{x}, \vec{y}) \Rightarrow R = \{O, (\vec{x}, \vec{y})\}$

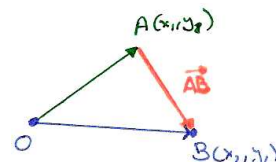


Dado un punto cualquiera R: $P(a,b)$, las coordenadas de dicho punto vendrán según el **vector posición** $\vec{p} = \vec{OP}$

Vector a partir de dos puntos

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad \rightarrow \quad A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$$

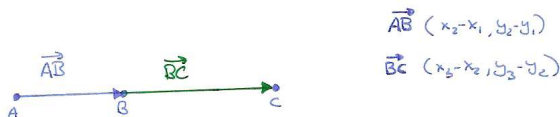
$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \quad (\text{igual pero de sentido contrario})$$



¿Cómo saber si dos puntos están alineados?

Los puntos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ y $C = (x_3, y_3)$ estarán alineados siempre que $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y $\vec{BC} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$ tengan la misma dirección, y esto ocurre si sus coordenadas son proporcionales, es decir, si se cumple que:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

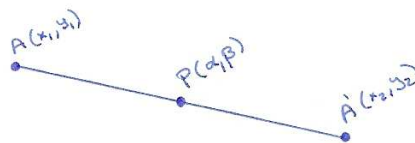


Podemos deducir, aplicando vectores, que si los vectores tienen la misma dirección, el ángulo que forman entre ellos es de 0° , es decir, si realizamos el producto vectorial: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ ya que $\cos(\hat{u}, \vec{v}) = 1$

¿Cuál es el Punto Medio (M) de un segmento?

Siendo $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos de un segmento, su punto medio será $M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

Cabe destacar que M es un punto simétrico a A y B.



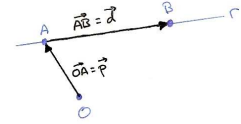
Punto simétrico de un punto respecto de otro

Si tenemos dos puntos, A y P, podemos hallar el simétrico de A respecto de P, tomando a éste último como punto medio entre A y A', siendo este último el simétrico de A.

$$A = (x_1, y_1) \quad P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = (\alpha, \beta) \quad A' = (x_2, y_2)$$

Los valores desconocidos son los de A', con lo que a partir de sustituir los valores de A en P, tenemos un sistema de tal manera que: $(x_2, y_2) = (2 \cdot \alpha - x_1, 2 \cdot \beta - y_1)$

Ecuaciones de las Rectas



Recta que pasa por dos puntos

Sabiendo dos puntos, A y B, podemos tener tanto un vector de posición $\vec{p} = \vec{OA}$, como un vector dirección $\vec{d} = \vec{AB}$, y por consiguiente, podemos obtener cualquier ecuación de una recta como veremos en los siguientes apartados.

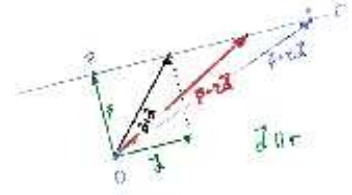
Nota: En caso de no conocer O, podemos tomar $O=(0,0)$

Ecuación vectorial de la recta $\vec{OX} = \vec{p} + t \cdot \vec{d}$

O es el origen de coordenadas. X es un punto variable de la recta r.

\vec{p} es el vector posición y \vec{d} es el vector dirección, que es paralelo a r. $\vec{d} \parallel r$

t es el parámetro, de tal manera, que al variar t, varía X sobre r



Ecuación paramétrica de la recta

$$\begin{cases} x = p_1 + t \cdot d_1 \\ y = p_2 + t \cdot d_2 \end{cases}$$

Sabiendo los siguientes datos, $\vec{OX} = (x, y)$ $\vec{p} = (p_1, p_2)$ $\vec{d} = (d_1, d_2)$, y sustituyendo los mismos en la ecuación vectorial de la recta, obtendremos el sistema que implica la ecuación pedida. Para cada t obtendremos un punto (x,y).

Ecuación continua de la recta

$$\frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2} \quad \rightarrow \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

Despejando t y realizando el método de igualación obtenemos esta ecuación. Muy conocida de la segunda forma expresada.

Ecuación General o Implícita de la recta

$$r : Ax + By + C = 0$$

A partir de la ecuación paramétrica, si despejamos t, y realizamos, por ejemplo, el método de igualación $t=t$, obtendremos lo siguiente:

$d_2 x - d_1 y - d_2 p_1 + d_1 p_2 = 0$, y llamando $A = d_2$ $B = -d_1$ y $C = -d_2 p_1 + d_1 p_2$, tenemos dicha ecuación general.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = p_1 + d_1 t \\ y = p_2 + d_2 t \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{x - p_1}{d_1} = t \\ \frac{y - p_2}{d_2} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2} \\ d_2 x - d_1 y - d_2 p_1 + d_1 p_2 = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2} \\ d_2 x - d_1 y - d_2 p_1 + d_1 p_2 = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow A = d_2 \quad B = -d_1 \quad C = d_1 p_2 - d_2 p_1 \\ & \Rightarrow \boxed{Ax + By + C = 0} \end{aligned}$$

Especial atención hay que hacer sobre el punto (A, B) , ya que sustituyendo por sus valores originales obtenemos $(d_2, -d_1)$, o lo que es lo mismo, un **vector dirección perpendicular** a la recta r, es decir, $(A, B) \perp r$

Recordemos del tema de vectores, que para conseguir un vector perpendicular a uno dado, sólo tenemos que permutar sus componentes y cambiarle el signo a una de ellas. $(v_1, v_2) \perp (v_2, -v_1)$ o también, $(v_1, v_2) \perp (-v_2, v_1)$

Ecuación Explícita de la recta $r: y = mx + n$

De la ecuación implícita, si $B \neq 0$, si despejamos y obtendremos la siguiente ecuación $y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$, y haciendo $m = \frac{-A}{B}$ y $n = \frac{-C}{B}$, obtenemos la ecuación explícita de la recta.

m es la pendiente de la recta, mientras que n es la ordenada en el origen.

Ecuación Punto Pendiente de la recta

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0)$$

Ecuación canónica, segmentaria o Forma de los interceptos

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta es el incremento de la ordenada cuando la abscisa aumenta una unidad, de tal manera que

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

también podemos decir que $m = \frac{-A}{B}$ a partir de una Ecuación General o Implícita de la recta, o que $m = \frac{-d_2}{(-d_1)} = \frac{d_2}{d_1}$

Posición de dos rectas según su pendiente

- Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente: $r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$
- Dos rectas son **perpendiculares** si: $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ o también $r_1 \perp r_2 \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{m_1}$

$$\begin{aligned} r_1: y = m_1 x + n_1 &\rightarrow m_1 x - y + n_1 = 0 \rightarrow (m_1, -1) \perp r_1 \\ r_2: y = m_2 x + n_2 &\rightarrow m_2 x - y + n_2 = 0 \rightarrow (m_2, -1) \perp r_2 \end{aligned}$$

Si son perpendiculares, $(m_1, -1) \cdot (m_2, -1) = 0 \rightarrow m_1 \cdot m_2 + 1 = 0$

$$\text{luego } \underline{m_1 \cdot m_2 = -1} \quad \text{c.p.d}$$

- En general, el **ángulo** formado entre dos rectas será:

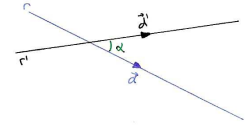
$$\widehat{r_1, r_2} = \varphi \rightarrow \text{tg } \varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right|$$

$$\begin{aligned} r_1: m_1 &= \text{tg } \beta \\ r_2: m_2 &= \text{tg } \alpha \end{aligned} \Rightarrow \varphi = \alpha - \beta \quad (\text{ángulo entre ambas rectas})$$

$$\text{tg } \varphi = \left| \text{tg } (\alpha - \beta) \right| = \left| \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \right| = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right|$$

Ángulo de dos rectas

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{d}'|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{d}'|}$$



Nota importante: En el numerador tenemos el valor absoluto del producto escalar de dos vectores, mientras que en el denominador, tenemos el producto del módulo de cada uno de los vectores.

- Si $\vec{d} = (d_1, d_2)$ es vector director de r :
- Cualquier recta con vector director $(k \cdot d_1, k \cdot d_2)$ será paralela o coincidente a r , siempre que k no sea cero.
- Cualquier recta con vector director $(d_2, -d_1)$ o $(k \cdot d_2, -k \cdot d_1)$ será perpendicular a r , siempre que k no sea cero.

Posición relativa de dos rectas

A través de sus Ecuaciones Generales

Sean $r_1: Ax + By + C = 0$ y $r_2: A'x + B'y + C' = 0$ tendremos que el sistema de ecuaciones formado entre ambos tendrá:

- **Solución única** si: $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$,
- **Sin solución**, es decir $r_1 \parallel r_2$, si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$,
- **Infinitas soluciones**, es decir, coincidentes, si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$,

A través de sus Ecuaciones Paramétricas

Sean $r_1: \begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = a' + b's \\ y = c' + d's \end{cases}$ tendremos que resolver un sistema de ecuaciones igualando las x y las y de ambas rectas, de tal manera que el sistema será $\begin{cases} a + bt = a' + b's \\ c + dt = c' + d's \end{cases}$ y las incógnitas serán t y s . Según el resultado de dicho sistema tendremos lo siguiente:

- Si el sistema tiene una **Solución única** $(t_0, s_0) \Rightarrow$ Obtendremos (x, y) sustituyendo t_0 en r_1 , o bien, s_0 en r_2
- Si el sistema **no** tiene una **solución**, las rectas son paralelas, es decir $r_1 \parallel r_2$
- Si el sistema tiene **Infinitas soluciones**, las rectas son coincidentes, es decir, son la misma.

Distancias

- Entre dos puntos

$$dist(P, Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Un punto a una recta

$$dist(P, r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

donde $P(a, b)$ y $r: Ax + By + C = 0$