1. Resuelve una de las siguientes ecuaciones trigonométricas, dando todas las posibles soluciones:
   a) $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$
   b) $4 \operatorname{sen} x + 2\cos 2x = 3$
   c) $\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$

2. Resuelve uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, dando las soluciones en el intervalo $[0,\ 2\pi]$:
   a) $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \\ x - y \quad 30^{\circ} \end{cases}$
   b) $\begin{cases} y + \operatorname{sen}^2 \qquad 2 \\ y + \cos^2 \qquad 1 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} \cos x \quad \cos \quad = 1 \\ \cos 2 \quad + \cos 2y = -1 \end{cases}$

3. Dado el triángulo ABC con $a = 1$ m, $B = 30^{\circ}$ y $C = 45^{\circ}$:
   a) Resuelve el triángulo.
   b) Calcula su área.

4. Realiza uno de los dos apartados siguientes:
   a) Calcula el valor de la siguiente expresión, simplificando el resultado:

   $$\frac{\operatorname{cotg} 150^{\circ} - \operatorname{cosec} 315^{\circ}}{\sec 120^{\circ} - \operatorname{tg} 240^{\circ}}$$

   b) Simplifica todo lo que puedas la expresión

Soluciones

1. Resuelve una de las siguientes ecuaciones trigonométricas, dando todas las posibles soluciones:

a) $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$

Por un lado:

$$\cos 4x = \cos(3x + x) = \cos 3x \cdot \cos x - \mathrm{sen}\, 3x \cdot \mathrm{sen}\, x$$

y, por otro:

$$\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cdot \cos x + \mathrm{sen}\, 3x \cdot \mathrm{sen}\, x$$

Sumando las dos igualdades anteriores obtenemos:

$$\cos 4x + \cos 2x = 2\cos 3x \cdot \cos x$$

Entonces la ecuación que hemos de resolver es equivalente a:

$$2\cos 3x \cdot \cos x = \cos x \Leftrightarrow 2\cos 3x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos 3x - 1) = 0$$

Hay dos posibilidades.

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k$ (en radianes sería $\frac{\pi}{2} + k\pi$).
- $2\cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = 60^\circ + 360^\circ k$, o bien $3x = 300^\circ + 360^\circ k \Leftrightarrow x = 20^\circ + 120^\circ k$ (en radianes sería $\frac{\pi}{} + \frac{2k}{3}$), o bien $x = 100^\circ + 120^\circ k$ (en radianes sería $\frac{5\pi}{9} + \frac{k}{}$).

b) $4\,\mathrm{sen}\, x + 2\cos 2x = 3 \Leftrightarrow 4\,\mathrm{sen}\, x + 2(\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow 4\,\mathrm{sen}\, x + 2(1 - \mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\,\mathrm{sen}\, x + 2(1 - 2\mathrm{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow -4\mathrm{sen}\ \ x + 4\,\mathrm{sen}\, x - 1 = 0$.

Llamando $\mathrm{sen}\, x = t$, tenemos $-4t^2 + 4t + 1 = 0$, ecuación de segundo grado cuya solución es $t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-1)}}{2\cdot(-4)} = \frac{-4}{-8} = \frac{}{2}$. Así pues $\mathrm{sen}\, x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 30^\circ + 360^\circ k$, o bien $x = 120^\circ + 360^\circ k$ (en radianes serían $x = \frac{\pi}{6} + 2\ \ \pi$, o bien $x = \frac{2\pi}{6} + 2\ \ \pi$).

c) $\mathrm{cosec}\, x - \mathrm{cotg}\, x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{sen}\, x} - \frac{\cos x}{\mathrm{sen}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x \Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3}\sqrt{1 - \cos^2 x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3 - 3\cos^2 x}$. Elevando ambos miembros al cuadrado: $1 - 2\cos x + \cos\ \ x = 3 - 3\cos^2 x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos\ \ x - \cos x - 1 = 0$. Llamando $\cos x = t$, tenemos $2t^2 - t - 1 = 0$, ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{1\pm}{4} = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

- Si $t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0^\circ + 360^\circ k = 360^\circ k$ (en radianes $x = 2k\pi$). Esta solución habría que descartarla pues $\mathrm{cosec}\, x$ y $\mathrm{cotg}\, x$ no están definidas para $x = 2k\pi$.
- Si $t = -\frac{}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{} \Leftrightarrow x = 120^\circ + 360^\circ k$, o bien $x = 240^\circ + 360^\circ k$ (en radianes $x = \frac{2\pi}{3} + 2\ \ \pi$, o bien $x = \frac{4\pi}{3} + 2\ \ \pi$). La segunda solución habría que descartarla pues:

Por un lado, $\operatorname{cosec} 240^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 240^\circ} = \dfrac{1}{-\operatorname{sen} 60^\circ} = \dfrac{1}{-\sqrt{3}/2} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Y, por otro lado, $\operatorname{cotg} 240^\circ = \operatorname{cotg} 60^\circ = \dfrac{\cos 60^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Así pues $\operatorname{cosec} 240^\circ - \operatorname{cotg} 240^\circ = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$.

Lo que ocurre es que al elevar al cuadrado lo signos se convierten a positivos.

2. Resuelve uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, dando las soluciones en el intervalo $[0,\ 2\pi]$:

a) $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \\ x - y \quad 30^\circ \end{cases}$

Como $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$, y de la primera ecuación se deduce que $\cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = 0$, entonces $\cos(x+y) = 0$. De la segunda ecuación $x = 30^\circ + y$. Por tanto

$$\cos(30^\circ + 2y) = 0 \Leftrightarrow 30^\circ + 2y = \begin{cases} 90^\circ \\ 270^\circ \end{cases} \Leftrightarrow 2y = \begin{cases} 60^\circ \\ 240^\circ \end{cases} \Leftrightarrow y = \begin{cases} 30^\circ \\ 120^\circ \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

Como $x = 30^\circ + y \Rightarrow x = \begin{cases} 60^\circ \\ 150^\circ \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$.

Por tanto hay dos parejas de soluciones $(x_1,\ y\ ) = \left(\dfrac{\pi}{3} \quad \pi\right)$, $(x\ ,\ y_2) = \left(\dfrac{5\pi}{6} \quad \dfrac{\pi}{\ }\right)$.

Recuérdese que las soluciones había que darlas en el intervalo $[0,\ 2\pi]$.

b) $\begin{cases} y + \operatorname{sen}^2 \quad\quad 2 \\ y + \cos^2 \quad\quad 1 \end{cases}$

Restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = -1 \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$y + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} = 2 \Leftrightarrow y + 1 = 2 \Leftrightarrow y = 1.$$

c) $\begin{cases} \cos x \quad \cos \quad = 1 \\ \cos 2 \quad + \cos 2y = -1 \end{cases}$

Observemos que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$.

De la misma manera, $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$.

Sustituyendo en la segunda ecuación: $2\cos^2 x-1+2\cos^2 y-1=-1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\cos^2 y=1$.

Despejando $\cos x$ de la primera ecuación y sustituyendo en esta última obtenemos:

$$2\left(1-\cos y\right)^2+2\cos^2 y=1 \Leftrightarrow 2\left(1+\cos^2 y-2\cos y\right)+2\cos^2 y=1 \Leftrightarrow 4\cos^2 y-4\cos y+1=0.$$

Haciendo $\cos y=t$, tenemos la ecuación $4t^2-4t+1=0$ (la misma que aparece en el apartado b) del ejercicio 1), cuya solución es $t=\frac{1}{2}$. Entonces $\cos y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=\begin{cases}\frac{\pi}{3}\\ \frac{5\pi}{3}\end{cases}$

b) Simplifica todo lo que puedas la expresión $\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\left(1+2\cos\alpha\right)\operatorname{sen}\alpha}{\left(1+2\cos\alpha\right)\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$\cos x+\cos y=1 \Leftrightarrow \cos x=1-\cos y \Leftrightarrow \cos x=1-\frac{1}{2}=- \Leftrightarrow x=\begin{cases}\frac{\pi}{3}\\ \frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

Tenemos pues dos parejas de soluciones: $(x_1,\ y\ )=\left(\frac{\pi}{3}\quad \pi\right)$, $(x_2,\ y\ )=\left(\frac{5\pi}{3}\quad \pi\right)$

3. Recordemos que en el triángulo ABC, $a=1$ m, $B=30^\circ$ y $C=45^\circ$.

   a) En primer lugar $A=180^\circ-30^\circ-45^\circ=105^\circ$.

   Por el teorema de los senos: $\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}105^\circ}=\frac{b}{\operatorname{sen}30^\circ} \Leftrightarrow b=\frac{\operatorname{sen}30^\circ}{\operatorname{sen}105^\circ} \Leftrightarrow \simeq 0,518\,\text{m}$.

   Análogamente: $\frac{1}{\operatorname{sen}105^\circ}=\frac{c}{\operatorname{sen}45^\circ} \Leftrightarrow c=\frac{\operatorname{sen}45^\circ}{\operatorname{sen}105^\circ} \Leftrightarrow \simeq 0,732\,\text{m}$.

   b) Utilicemos una de las fórmulas conocidas para calcular el área A del triángulo:

   $$\text{A}=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}C=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0,518\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0,183\,\text{m}^2.$$

4. Realiza uno de los dos apartados siguientes:

   a) Calcula el valor de la siguiente expresión, simplificando el resultado: $\frac{\operatorname{cotg}150^\circ-\operatorname{cosec}315^\circ}{\sec 120^\circ-\operatorname{tg}240^\circ}$

$$\frac{\operatorname{cotg}150^\circ-\operatorname{cosec}315^\circ}{\sec 120^\circ-\operatorname{tg}240^\circ}=\frac{\frac{\cos 150^\circ}{\operatorname{sen}150^\circ}-\frac{1}{\operatorname{sen}315^\circ}}{\frac{1}{\cos 120^\circ}-\frac{\operatorname{sen}240^\circ}{\cos 240^\circ}}=\frac{\frac{-\cos 30^\circ}{\operatorname{sen}30^\circ}\quad\frac{1}{\operatorname{sen}45^\circ}}{\frac{}{-\cos 60^\circ}\quad\frac{-\operatorname{sen}60^\circ}{\cos 60^\circ}}=$$

$$=\frac{\frac{-\sqrt{3}/2}{1/}+\frac{1}{\sqrt{2}/}}{\frac{1}{-1/2}-\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}}=\frac{-\sqrt{3}\quad\frac{2}{\sqrt{2}}}{-2-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{-2-\sqrt{3}}=\frac{(-\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(-2+\sqrt{3})}{(-2-\sqrt{3})\cdot(-2+\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-3-2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4-}=\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-3$$

   b) Simplifica todo lo que puedas la expresión $\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\left(1+2\cos\alpha\right)\operatorname{sen}\alpha}{\left(1+2\cos\alpha\right)\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$$