

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Para resolver ecuaciones exponenciales (la incógnita está en el exponente, con la base positiva y distinta de 1), suelen ser útiles las siguientes estrategias:

- Hacer que la incógnita aparezca en única potencia igualada a un número ($a^{f(x)}=b$), tomar logaritmos y despejar x .
- Lo mismo, igualada a otra potencia ($a^{f(x)}=b^{g(x)}$), tomar logaritmos y despejar x .
- Igualar dos potencias de la misma base ($a^{f(x)} = a^{g(x)}$) e igualar los exponentes (porque $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$, siendo $a > 0$, $a \neq 1$).
- Hacer que la incógnita aparezca con la misma base y exponente ($a^{f(x)}$) en más de un lugar de la ecuación, y realizar un cambio de incógnita ($t = a^{f(x)}$), y deshacer, después de resuelto, el cambio.

Para resolver ecuaciones logarítmicas, hay que quitar logaritmos, empleando que $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, siendo $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$. También se puede realizar un cambio de incógnita, haciendo la nueva incógnita igual a una expresión con logaritmos, y deshacer, después de resuelto, el cambio. **En las ecuaciones logarítmicas hay que comprobar siempre la validez de las soluciones, porque los argumentos de los logaritmos en la ecuación original no pueden hacerse cero ni negativos.**

Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas exponenciales y logarítmicos:

- 1) $3^{x-1} = 3^{2x+1}$ *Sol: -2*
- 2) $2^{x+1} = 4 \cdot 8^x$ *Sol: -1/2*
- 3) $3^{-x+1} = 3^{2x+3}$ *Sol: -2/3*
- 4) $12 \cdot 4^{x+1} = 3 \cdot 8^x$ *Sol: 4*
- 5) $2^{1-x^2} = \frac{1}{256}$ *Sol: ±3*
- 6) $2^{1+x} = 4^{2-x}$ *Sol: 1*
- 7) $(4^{3-x})^{2-x} = 1$ *Sol: 2; 3*
- 8) $(10^{5-x})^{6-x} = 100$ *Sol: 4; 7*
- 9) $128^{x+1} = 2^{x^2-x-2}$ *Sol: -1; 9*
- 10) $3^x \cdot 9^x = 9^3$ *Sol: 2*
- 11) $\frac{81^2 (3^x)^x}{9^{3x}} = 1$ *Sol: 2; 4*
- 12) $4^x \cdot 16^x = 2$ *Sol: 1/6*
- 13) $\frac{6^x}{4} = 3^x$ *Sol: 2*
- 14) $3^{5x^2-4x+4} = 3$ *Sol: No tiene*
- 15) $(3^5)^{x^2-5x+5} = 243$ *Sol: 1; 4*
- 16) $27^{3x+1} = 81^{2x+1}$ *Sol: 1*
- 17) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = \frac{13}{3}$ *Sol: 0*
- 18) $3^x + 3^{x-1} + 3^{x+2} + 3^{x+1} = 120$ *Sol: 2*
- 19) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = \frac{31}{4}$ *Sol: -1*
- 20) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$ *Sol: 2*
- 21) $3^x - 2 \cdot 9^x + 15 = 0$ *Sol: 1*

- 22) $5^{x+1} = 10 + 3 \cdot 5^{2-x}$ *Sol: 1*
- 23) $4^x = 8 + 2^{x+1}$ *Sol: 2*
- 24) $\frac{5^{2x-1}}{25^{x^2-\frac{1}{4}}} = 1$ *Sol: 1/2*
- 25) $2^{2x+1} = 17 \cdot 2^x - 8$ *Sol: -1; 3*
- 26) $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 255$ *Sol: 7*
- 27) $2^x = 7$ *Sol: $\ln 7 / \ln 2$*
- 28) $9^x + 6 = 5 \cdot 3^x$ *Sol: 1; $\ln 2 / \ln 3$*
- 29) $3^{2-x} = 2^{3+x}$ *Sol: $(2\ln 3 - 3\ln 2) / (\ln 2 + \ln 3)$*
- 30) $\frac{9^{x-1}}{2^{3-x}} = 81 \cdot 27^x$ *Sol: $(6\ln 3 + 3\ln 2) / (\ln 2 - \ln 3)$*
- 31) $3^x + 4 \cdot 3^x = 7$ *Sol: $(\ln 7 - \ln 5) / \ln 3$*
- 32) $4^{x+1} + 6 = 28 \cdot 2^{x-1}$ *Sol: -1; $\log 3 / \log 2$*
- 33) $\log_2(x^2 - 5x + 4) = \log_2(2x - 6)$ *Sol: 5*
- 34) $2\log(x - 1) = \log(x + 11)$ *Sol: 5*
- 35) $2\log x - \log(x - 16) = 2$ *Sol: 20; 80*
- 36) $2\log_4(x - 1) = 1$ *Sol: 3*
- 37) $\log x = \frac{2 - \log x}{\log x}$ *Sol: 10; 0.01*
- 38) $\log(2x^2 - 1) - \log(3x + 2) = 1 - \log 50$ *Sol: 1*
- 39) $3 \log x - \log \frac{x}{2} = \log 32$ *Sol: 4*
- 40) $\log(x - 2) + \log(x - 3) = \log(x^2 + 1)$ *Sol: 1*
- 41) $\left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 5 \\ \log x - \log y = -1 \end{array} \right\}$ *Sol: (100; 1000)*
- 42) $\left. \begin{array}{l} \log x - 3 \log y = -3 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{array} \right\}$ *Sol: (1000, 100)*
- 43) $\left. \begin{array}{l} \log x + 3 \log y = 7 \\ \log \frac{x^3}{y} = 1 \end{array} \right\}$ *Sol: (10, 100)*
- 44) $\left. \begin{array}{l} 2x - 5y = 30 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right\}$ *Sol: (20, 2)*
- 45) $\left. \begin{array}{l} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 60 \\ 2^{x+y} = 4^5 \end{array} \right\}$ *Sol: (8, 2)*
- 46) $\left. \begin{array}{l} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{array} \right\}$ *Sol: (2, 1)*
- 47) $\left. \begin{array}{l} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{array} \right\}$ *Sol: $(\sqrt{10^7}, \sqrt{10})$*