Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 4 ▮ Ficha 1
Razones y proporciones

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ________

Una **razón** es la división entre dos cantidades comparables. Se representa $\frac{a}{b}$ y se lee «*a* es a *b*».
El número *a* se llama **antecedente** y el *b* se llama **consecuente.**

1. Calcula las razones entre las cantidades siguientes e interpreta el resultado:

a) 3,5 kg de naranjas cuestan 6,3 €.

a) 6,3/3,5 = 1,8 €/kg $\Rightarrow$ El kilo de naranjas cuesta 1,8 €.

b) Un coche en 5 horas recorre 400 km.

b) 400/5 = 80 km/h $\Rightarrow$ El coche lleva una velocidad media de 80 km/h.

Una **proporción** es una igualdad de dos razones. Se representa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee «*a* es a *b* como *c* es a *d*» $\Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$ (El producto de los medios es igual al producto de los extremos.)
Se llama **cuarto proporcional** al término desconocido de una proporción de la que se conocen los otros tres.

2. Calcula mentalmente y completa para que formen proporción:

a) $\frac{5}{9} = \frac{\blacksquare}{36}$ b) $\frac{\blacksquare}{9} = \frac{12}{54}$

c) $\frac{2}{\blacksquare} = \frac{3}{4,5}$ d) $\frac{2}{0,9} = \frac{10}{\blacksquare}$

a) $\frac{5}{9} = \frac{20}{36}$ b) $\frac{2}{9} = \frac{12}{54}$

c) $\frac{2}{3} = \frac{3}{4,5}$ d) $\frac{2}{0,9} = \frac{10}{4,5}$

3. Calcula el cuarto proporcional:

a) $\frac{x}{9} = \frac{21}{7}$ b) $\frac{1,5}{1,5} = \frac{6}{x}$ c) $\frac{3,6}{x} = \frac{7,2}{6}$

a) $x = \frac{9 \cdot 21}{7} = 27$ b) $x = \frac{6 \cdot 1,2}{1,5} = 4,8$ c) $x = \frac{3,6 \cdot 6}{7,2} = 3$

Se llama **medio proporcional** a los términos iguales de una proporción continua.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = a \cdot b \Rightarrow x = \pm\sqrt{a \cdot b}$$

4. Calcula el medio proporcional:

a) $\frac{10}{x} = \frac{x}{3,6}$ b) $\frac{2,5}{x} = \frac{x}{6,4}$

a) $x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$ b) $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

Matemáticas 3.º ESO ▮ Unidad 4 ▮ Ficha 2
Magnitudes proporcionales (I)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si el cociente de las cantidades correspondientes es constante.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow k \text{ es la constante de proporcionalidad directa.}$$

1. Las siguientes magnitudes son directamente proporcionales, calcula x e indica la constante de proporcionalidad:

a) $\frac{x}{7} = \frac{12}{21}$

a) $x = \frac{7 \cdot 12}{21} = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{7} = \frac{12}{21} \cong 0{,}57$

b) $\frac{2{,}5}{3{,}2} = \frac{10}{x}$

b) $x = \frac{3{,}2 \cdot 10}{2{,}5} = 12{,}8 \Rightarrow k = \frac{2{,}5}{3{,}2} = \frac{10}{12{,}8} = 0{,}78125$

La regla de tres es un procedimiento para hallar un cuarto proporcional. La proporcionalidad es directa cuando va de + a + o de – a –

Magnitud *A* (unidad)	(D)	**Magnitud *B*** (unidad)
a	$\longrightarrow$	c
b	$\longrightarrow$	x

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

2. Resuelve los siguientes problemas:

a) Si 8 cintas de vídeo cuestan 212 €, ¿cuántas cintas se pueden comprar con 371 €?

Dinero (€)	(D)	N.º de cintas de video
212	$\longrightarrow$	8
371	$\longrightarrow$	x

$$\frac{212}{371} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 14 \text{ cintas}$$

b) Una tubería de 15 m de longitud pesa 210 kg. ¿Cuál será la longitud de una tubería que pesa 308 kg si es del mismo material y de la misma sección?

Peso (kg)	(D)	Longitud (m)
210	$\longrightarrow$	15
308	$\longrightarrow$	x

$$\frac{210}{308} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 22 \text{ m}$$

c) Nueve bombillas iguales han consumido un total de 54 kWh. Si en las mismas condiciones encendemos 15 bombillas iguales, ¿cuántos kWh se consumirán?

N.º de bombillas	(D)	Consumo (kWh)
9	$\longrightarrow$	54
15	$\longrightarrow$	x

$$\frac{9}{15} = \frac{54}{x} \Rightarrow x = 90 \text{ kWh}$$

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si el producto de las cantidades correspondientes es constante.

La **constante de proporcionalidad inversa** es el valor del producto constante:

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \text{ Son inversamente proporcionales } \Rightarrow k = a \cdot b = c \cdot d$$

1. A una velocidad de 10 km/h se tardan 6 horas en recorrer una distancia. Las magnitudes velocidad y tiempo son inversamente proporcionales. Calcula la constante de proporcionalidad.

La constante de proporcionalidad inversa es: $10 \cdot 6 = 60$

La regla de tres es inversa cuando va de + a – o de – a +, cuando esto sucede la razón de las cantidades de la magnitud A se colocan invertidas.

Magnitud *A* (unidad)	(I)	**Magnitud *B*** (unidad)
a	$\longrightarrow$	c
b	$\longrightarrow$	x

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{a \cdot c}{b}$$

2. Resuelve los siguientes problemas:

a) Cuatro amigos se reparten el alquiler de un apartamento de verano. Cada uno paga 375 €. Si se uniesen dos amigos más, ¿cuánto pagaría cada uno?

N.º amigos	(I)	Dinero (€)
4	$\longrightarrow$	375
6	$\longrightarrow$	x

$$\frac{6}{4} = \frac{375}{x} \Rightarrow x = 250 \text{ €}$$

b) Un coche recorre un trayecto en 1 hora y media a 65 km/h. Si desea tardar 75 minutos, ¿a qué velocidad deberá recorrer el mismo trayecto?

Tiempo (min)	(I)	Velocidad (km/h)
90	$\longrightarrow$	65
75	$\longrightarrow$	x

$$\frac{75}{90} = \frac{65}{x} \Rightarrow x = 78 \text{ km/h}$$

c) Veinte obreros asfaltan un tramo de carretera en 60 días. ¿Cuántos obreros harán falta para asfaltar el mismo tramo de carretera en 40 días?

Tiempo (días)	(I)	N.º de obreros
60	$\longrightarrow$	20
40	$\longrightarrow$	x

$$\frac{40}{60} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 30 \text{ obreros}$$

Proporcionalidad compuesta

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Una **proporcionalidad es compuesta** si intervienen más de dos magnitudes proporcionales.

¿Proporcionalidad directa o inversa? (Magnitud A – Magnitud C)

¿Proporcionalidad directa o inversa? (Magnitud B – Magnitud C)

Magnitud *A* (unidad)		**Magnitud *B* (unidad)**		**Magnitud *C* (unidad)**
a	$\longrightarrow$	c	$\longrightarrow$	e
b	$\longrightarrow$	d	$\longrightarrow$	x

Se plantea la proporción, con la razón directa o inversa, según corresponda, y se resuelve.

1. Resuelve los siguientes problemas:

a) Durante 30 días seis obreros han canalizado 150 m de tubería para suministro de agua. Calcula cuántos metros canalizarán catorce obreros en 24 días.

(D) (D)

Tiempo (días)		N.º de obreros		Longitud (m)
30	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	150
24	$\longrightarrow$	14	$\longrightarrow$	x

$$\frac{30}{24}\cdot\frac{20}{14}=\frac{150}{x}\Rightarrow x = 280 \text{ metros}$$

b) Los gastos de alimentación de 135 personas suponen 2 250 € diarios. Calcula cuántas personas podrán alimentarse durante 90 días con 12 000 €.

(D) (D)

Dinero (€)		Tiempo (días)		N.º de personas
2 250	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	135
12 000	$\longrightarrow$	90	$\longrightarrow$	x

$$\frac{2\,250}{12\,000}\cdot\frac{90}{1}=\frac{135}{x}\Rightarrow x = 8 \text{ personas}$$

c) Para hacer una obra en 360 días hacen falta 30 obreros trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días duraría la misma obra si hubiese 40 obreros trabajando 6 horas diarias?

(I) (I)

N.º de obreros		Tiempo diario (h)		Tiempo (días)
30	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	360
40	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	x

$$\frac{40}{30}\cdot\frac{6}{8}=\frac{360}{x}\Rightarrow x = 360 \text{ días}$$

Problemas aritméticos (I)

Bruño

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

Para repartir una cantidad N en partes que sean directamente proporcionales a otras cantidades conocidas a, b, c…, se sigue el procedimiento:

a) Se calcula k, la parte de N que le corresponde a cada unidad del total de las cantidades conocidas a, b, c…, es decir:

$$k = \frac{N}{a + b + c}$$

b) Con el valor de la unidad, k, se calculan los valores de las partes deseadas.

1. Reparte 15 000 € en partes directamente proporcionales a 2, 3 y 5.

15 000 : (2 + 3 + 5) = 1 500

x = 1 500 · 2 = 3 000 € y = 1 500 · 3 = 4 500 € z = 1 500 · 5 = 7 500 €

2. Reparte 13 500 € en partes directamente proporcionales a 4, 6 y 8.

13 000 : (4 + 6 + 8) = 750

x = 750 · 4 = 3 000 € y = 750 · 6 = 4 500 € z = 750 · 8 = 6 000 €

3. Tres amigos organizan una peña para jugar a las quinielas y aportan 23, 34 y 41 €. Si aciertan una quiniela por la que cobran 120 540 €, ¿qué cantidad le corresponde a cada uno si el reparto se hace de forma directamente proporcional al dinero aportado?

120 540 : (23 + 34 + 41) = 1 230

x = 1 230 · 23 = 28 290 € y = 1 230 · 34 = 41 820 € z = 1 230 · 41 = 50 430 €

Para repartir una cantidad N en partes que sean inversamente proporcionales a otras cantidades conocidas a, b, c…, se hace un reparto directamente proporcional a las inversas $1/a$, $1/b$, $1/c$… Para ello:

a) Se calcula primero el inverso de a, b, c…, y se reducen a común denominador (m.c.m.).

b) Se hace el reparto directamente proporcional a los numeradores.

4. Reparte 11 050 € en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 4.

m.c.m. (2, 3, 4) = 12 ⇒ 1/2 = 6/12, 1/3 = 4/12, 1/4 = 3/12

Se reparte directamente proporcional a 6, 4 y 3 respectivamente: 11 050 : (6 + 4 + 3) = 850

x = 850 · 6 = 5 100 € y = 850 · 4 = 3 400 € z = 850 · 3 = 2 550 €

5. Reparte 11 750 € en partes inversamente proporcionales a 3, 4 y 5.

m.c.m. (3, 4, 5) = 60 ⇒ 1/3 = 20/60, 1/4 = 15/60, 1/5 = 12/60

Se reparte directamente proporcional a 20, 15 y 12, respectivamente. 11 750 : (20 + 15 + 12) = 250

x = 250 · 20 = 5 000 € y = 250 · 15 = 3 750 € z = 250 · 12 = 3 000 €

Problemas aritméticos (II)

Bruño

Nombre ____________ Curso ______ Fecha ________

- La **disminución porcentual** de una cantidad inicial es lo que disminuye dicha cantidad según un porcentaje.
- El **aumento porcentual** de una cantidad inicial es lo que aumenta dicha cantidad según un porcentaje.

1. A un trabajador le descuentan mensualmente de su nómina el 5% para un seguro que asciende a 1 440 €. ¿Qué cantidad le descuentan?

Descuentan: 1 440 · 0,05 = 72 €

2. En la factura de un taller aplican un 16% de IVA sobre un importe de 168 €. ¿Cuánto se paga en total?

Total: 168 · 1,16 = 194,88 €

3. En una compra a plazos de 4 570,5 € suben el precio un 15,25%. ¿Cuánto se pagará en total?

Total: 4 570,5 · 1,1525 = 5 267,5 €

Para calcular **aumentos y disminuciones porcentuales encadenados** se calcula el índice de variación total multiplicando los índices de variación de cada paso.

4. En una factura de 350 € nos aplican un 20% de descuento y un 16% de IVA. Calcula el importe total de la factura.

Total: 350 · 0,8 · 1,16 = 324,8 €

5. Un determinado producto aumenta su precio un 15% en un año. Al año siguiente aumenta un 16%. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento en total?

1,15 · 1,16 = 1,334. Ha aumentado un 33,4%

6. En una tienda compramos un televisor con una rebaja del 20% y nos cobran el 16% de IVA. Si pagamos 232 € por él, ¿cuál era su precio inicial?

$x \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}16 = 232$

Precio inicial: 232 : (0,8 · 1,16) = 250 €

Nombre ______________________ Curso ________ Fecha ____________

1. Determina si los siguientes pares de razones forman proporción y calcula la constante de proporcionalidad:

a) $\dfrac{15\text{ m}}{3\text{ m}} \quad \dfrac{10\text{ días}}{2\text{ días}}$

a) $\dfrac{15\text{ m}}{3\text{ m}} = \dfrac{10\text{ días}}{2\text{ días}} = 5$

b) $\dfrac{51}{121} = \dfrac{1{,}5}{4}$

b) $51 \cdot 4 \neq 121 \cdot 1{,}5 \Rightarrow$ No forman proporción.

2. Con 100 kg de harina se hacen 120 kg de pan. Calcula la harina necesaria para elaborar un pan de 120 g.

Peso de pan (kg)	(D)	Peso de harina (kg)
120	⟶	100
0,12	⟶	x

$\dfrac{120}{0{,}12} = \dfrac{100}{x} \Rightarrow x = 0{,}1\text{ kg} = 100\text{ g}$

3. Las ruedas delanteras de un tractor tienen un diámetro de 0,9 m y las traseras tienen un diámetro de 1,2 m. Si en un trayecto las ruedas delanteras han dado 250 vueltas, ¿cuántas vueltas habrán dado las traseras?

Longitud (m)	(I)	N.º de vueltas
9	⟶	250
1,2	⟶	x

$\dfrac{1{,}2}{0{,}9} = \dfrac{250}{x} \Rightarrow x = 187{,}5$ vueltas

4. Ocho obreros trabajan 12 días para hacer una obra y cobran 3 600 €. ¿Cuánto ganarán seis obreros si hacen en 10 días el mismo trabajo?

(D) (D)

N.º de obreros		Tiempo (días)		Dinero (€)
8	⟶	12	⟶	3 600
6	⟶	10	⟶	x

$\dfrac{8}{6} \cdot \dfrac{12}{10} = \dfrac{3\,600}{x} \Rightarrow x = 2\,250$ €

5. Reparte mentalmente 600 € de forma proporcional a 1, 2 y 3.

$1 + 2 + 3 = 6 \Rightarrow 600 : 6 = 100$ €

$100 \cdot 1 = 100$ € $\quad 100 \cdot 2 = 200$ € $\quad 100 \cdot 3 = 300$ €

6. Si el 80% de una masa de bollería es harina, calcula cuánta harina contiene un bollo de 300 gramos.

Cantidad de harina: $300 \cdot 0{,}8 = 240$ g