

1 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Obtenga a y b sabiendo que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica? (1,25 puntos)

b) Para los valores $a = 3$ y $b = 1$, calcule la matriz X tal que $A \cdot B = 2(X - 3I)$. (1,25 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot a & 2(-1) + (-1) \cdot b \\ a \cdot 2 + b \cdot a & a(-1) + b \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4 - a = 5 \rightarrow a = 4 - 5; \quad \boxed{a = -1}$$

$$-2 - b = -2 \rightarrow -2 + 2 = b; \quad \boxed{b = 0}$$

$$2a + ab = -2$$

$$-a + b^2 = 1$$

Comprobamos 3ª y 4ª ecuación para $a = -1$ y $b = 0$
SE PUEDE HACER "DE CABEZA"

Las ecuaciones 3ª y 4ª también son ciertas para $a = -1$ y $b = 0$, luego:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz es simétrica porque coincide con su traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Como } A = A^t, \text{ } A \text{ es simétrica.}$$

$$b) \quad \text{Para } \begin{matrix} a=3 \\ b=1 \end{matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = 2(X - 3I); \quad 2X - 6I = A \cdot B; \quad 2X = A \cdot B + 6I; \quad X = \frac{1}{2}(A \cdot B + 6I)$$

$$\boxed{X = \frac{1}{2}AB + 3I}$$

Calculamos precisamente el producto $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1) + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 3(-1) + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

"SE PUEDE SALTAR"

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 9/2 \end{pmatrix}$$