

4

Resolución de triángulos



1. Resolución de triángulos rectángulos

■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente la incógnita que se pide en los siguientes triángulos rectángulos:

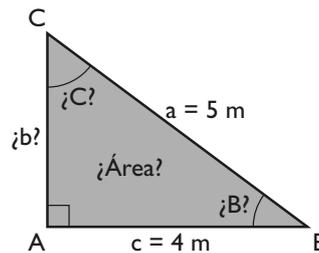
- a) $b = 6$ m, $c = 8$ m; halla la hipotenusa **a** b) $B = 35^\circ$; halla el otro ángulo agudo **C**

Solución:

- a) $a = 10$ m b) $C = 55^\circ$

● Aplica la teoría

1. En un triángulo rectángulo se conoce la hipotenusa $a = 5$ m y un cateto $c = 4$ m. Calcula los demás elementos.

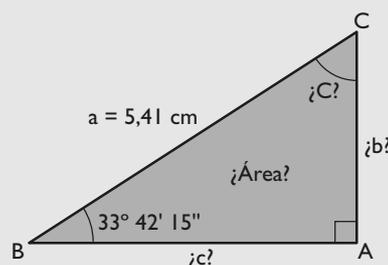


Solución:

Datos	Incógnita	Fórmulas	Resolución
$a = 5$ m	b	$b^2 = a^2 - c^2$	$b = 3$ m
$c = 4$ m	B	$\cos B = \frac{c}{a}$	$\cos B = \frac{4}{5} \Rightarrow B = 36^\circ 52' 12''$
	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 53^\circ 7' 48''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ m}^2$

2. En un triángulo rectángulo se conoce la hipotenusa $a = 5,41$ m y el ángulo $B = 33^\circ 42' 15''$. Calcula los demás elementos.

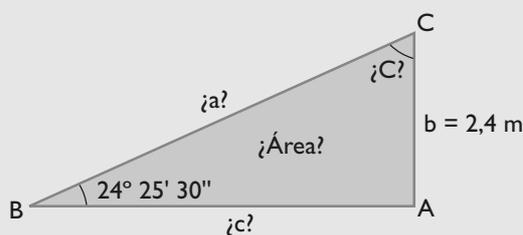
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 5,41 \text{ m}$ $B = 33^\circ 42' 15''$	C b c Área	$C = 90^\circ - B$ $\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \text{ sen } B$ $\text{cos } B = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \text{ cos } B$ $\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$C = 90^\circ - 33^\circ 42' 15'' = 56^\circ 17' 45''$ $b = 5,41 \text{ sen } 33^\circ 42' 15'' = 3 \text{ m}$ $c = 5,41 \text{ cos } 33^\circ 42' 15'' = 4,5 \text{ m}$ $\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4,5 = 6,75 \text{ m}^2$

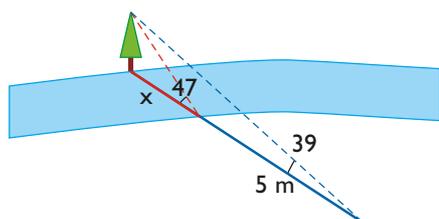
3. En un triángulo rectángulo se conoce un ángulo agudo $B = 24^\circ 25' 30''$ y el cateto opuesto $b = 2,4 \text{ m}$. Calcula los demás elementos.

Solución:

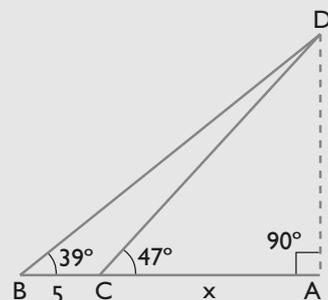


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 2,4 \text{ m}$ $B = 24^\circ 25' 30''$	C a c Área	$C = 90^\circ - B$ $\text{sen } B = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\text{sen } B}$ $\text{tg } B = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\text{tg } B}$ $\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$C = 90^\circ - 24^\circ 25' 30'' = 65^\circ 34' 30''$ $a = 5,8 \text{ m}$ $c = 5,28 \text{ m}$ $\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 5,28 = 6,34 \text{ m}^2$

4. Se quiere medir la anchura de un río. Para ello se observa un árbol que está en la otra orilla. Se mide el ángulo de elevación desde esta orilla a la parte más alta del árbol y se obtiene 47° . Alejándose 5 m del río, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtiene 39° . Calcula la anchura del río.



Solución:



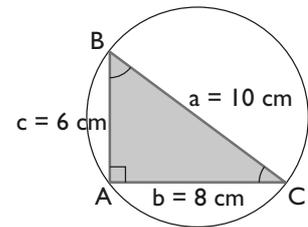
$$\left. \begin{array}{l} \text{tg } 47^\circ = \frac{h}{x} \\ \text{tg } 39^\circ = \frac{h}{5+x} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 15,42 \text{ m}$$

2. Teorema de los senos

■ Piensa y calcula

Observa el triángulo rectángulo del dibujo y calcula mentalmente el valor de k

$$k = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$$



Solución:

$$k = 10 \text{ cm}$$

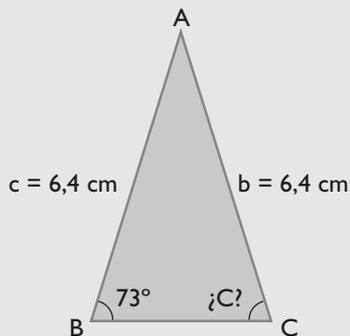
● Aplica la teoría

5. En un triángulo se conocen:

$$b = 6,4 \text{ cm}, c = 6,4 \text{ cm y } B = 73^\circ$$

Calcula mentalmente el ángulo C . ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:



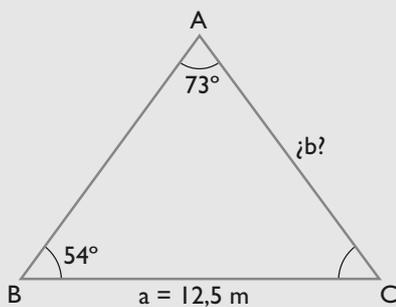
El triángulo es isósceles.

$C = 73^\circ$. La solución es única.

6. En un triángulo se conoce: $a = 12,5 \text{ m}$, $A = 73^\circ$ y $B = 54^\circ$

Calcula el lado b . ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:



$$\frac{12,5}{\operatorname{sen} 73^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 54^\circ} \Rightarrow b = \frac{12,5 \cdot \operatorname{sen} 54^\circ}{\operatorname{sen} 73^\circ} = 10,57 \text{ m}$$

Tiene una solución.

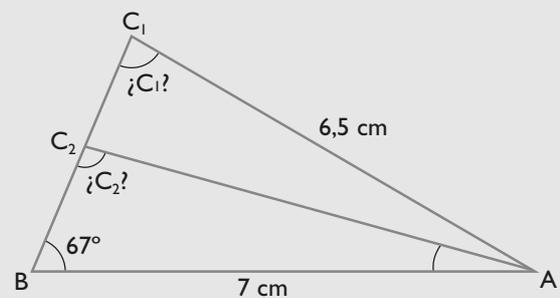
7. En un triángulo se conocen:

$$b = 6,5 \text{ cm}, c = 7 \text{ cm y } B = 67^\circ$$

Calcula el ángulo C . ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:

Datos:



$$\frac{6,5}{\operatorname{sen} 67^\circ} = \frac{7}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \operatorname{sen} C = \frac{7 \cdot \operatorname{sen} 67^\circ}{6,5}$$

$$C_1 = 82^\circ 26' 32'' \Rightarrow B + C_1 < 180^\circ$$

$$C_2 = 97^\circ 33' 28'' \Rightarrow B + C_2 < 180^\circ$$

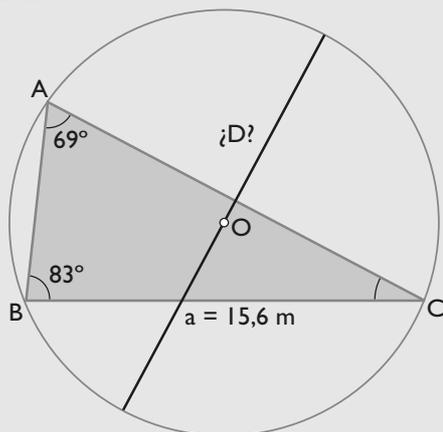
Tiene dos soluciones.

8. De un triángulo se conocen:

$$a = 15,6 \text{ m}, A = 69^\circ \text{ y } B = 83^\circ$$

Halla la longitud del diámetro de la circunferencia circunscrita.

Solución:



$$D = \frac{15,6}{\sin 69^\circ} = 16,71 \text{ m}$$

9. En un triángulo se conocen:

$$a = 5 \text{ m}, b = 8 \text{ m y } A = 72^\circ$$

Calcula el ángulo **B**. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:

$$\frac{5}{\sin 72^\circ} = \frac{8}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{8 \cdot \sin 72^\circ}{5} = 1,52$$

No tiene solución porque $\sin B = 1,52 > 1$

10. En un triángulo se conocen:

$$b = 7,5 \text{ cm}, A = 98^\circ \text{ y } B = 87^\circ$$

Calcula el lado **a**. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:

No hay solución porque:

$$A + B = 98^\circ + 87^\circ = 185^\circ > 180^\circ$$

3. Teorema del coseno

■ Piensa y calcula

Un triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo según que el cuadrado del lado mayor sea, respectivamente, menor, igual o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Clasifica mentalmente los siguientes triángulos:

a) $a = 2 \text{ m}, b = 3 \text{ m}, c = 4 \text{ m}$

b) $a = 3 \text{ m}, b = 4 \text{ m}, c = 5 \text{ m}$

c) $a = 4 \text{ m}, b = 5 \text{ m}, c = 6 \text{ m}$

Solución:

a) $16 > 13 \Rightarrow$ Obtusángulo.

b) $25 = 25 \Rightarrow$ Rectángulo.

c) $36 < 41 \Rightarrow$ Acutángulo.

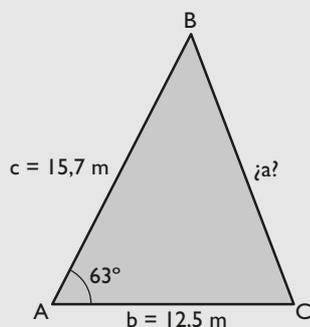
● Aplica la teoría

11. En un triángulo se conocen:

$$b = 12,5 \text{ m}, c = 15,7 \text{ m y } A = 63^\circ$$

Calcula el lado **a**

Solución:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = 12,5^2 + 15,7^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot 15,7 \cdot \cos 63^\circ$$

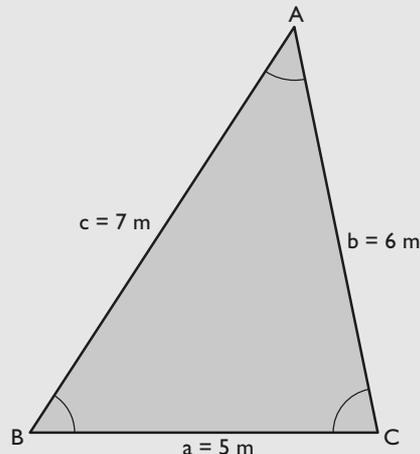
$$a = 14,98 \text{ m}$$

12. En un triángulo se conocen los tres lados:

$$a = 5 \text{ m}, b = 6 \text{ m y } c = 7 \text{ m}$$

Calcula el ángulo **A**

Solución:

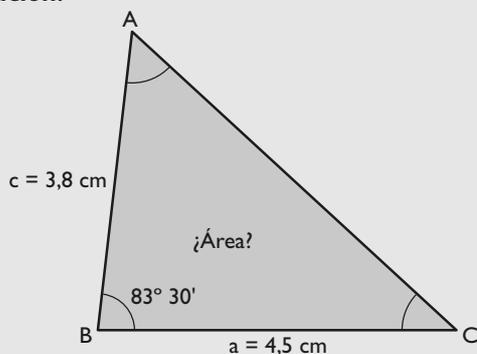


$$\cos A = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = 0,7143$$

$$A = 44^\circ 24' 51''$$

- 13.** En un triángulo se conocen:
 $a = 4,5$ cm, $c = 3,8$ cm y $B = 83^\circ 30'$
 Calcula su área.

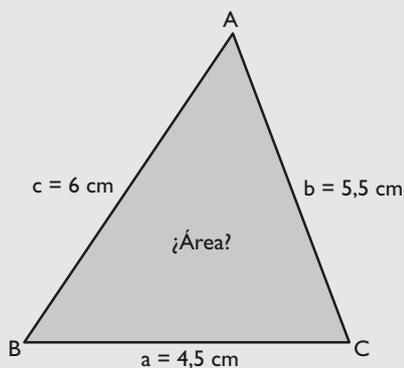
Solución:



$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 3,8 \cdot \sin 83^\circ 30' = 8,5 \text{ cm}^2$$

- 14.** En un triángulo se conocen los tres lados:
 $a = 4,5$ cm, $b = 5,5$ cm y $c = 6$ cm
 Calcula el área.

Solución:



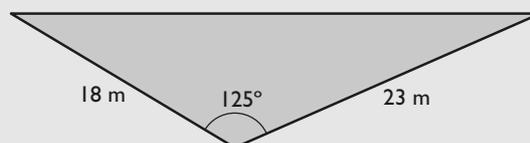
$$\text{Semiperímetro} = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \sqrt{8(8 - 4,5)(8 - 5,5)(8 - 6)} = 11,83 \text{ cm}^2$$

- 15.** Un solar tiene forma de triángulo y se conocen dos lados, que miden 18 m y 23 m, y el ángulo que forman, que es de 125° . El m^2 vale 30 €. Calcula el valor del solar.



Solución:



$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 23 \cdot \sin 125^\circ = 169,56 \text{ m}^2$$

$$\text{Precio} = 169,56 \cdot 30 = 5\,086,8 \text{ €}$$

4. Resolución de triángulos no rectángulos

■ Piensa y calcula

En un triángulo cualquiera, se sabe que $\sin A = 1/2$. Calcula mentalmente cuánto mide el ángulo A.
 ¿Cuántas soluciones puede tener, una o dos?

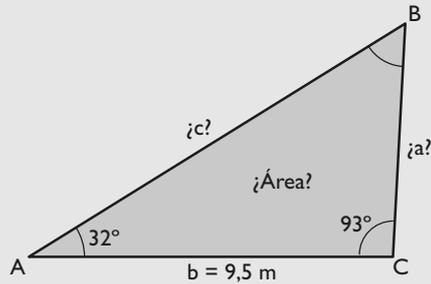
Solución:

Tiene dos soluciones: $A = 30^\circ$ y $A = 150^\circ$

● Aplica la teoría

16. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $b = 9,5 \text{ m}$, $A = 32^\circ$ y $C = 93^\circ$

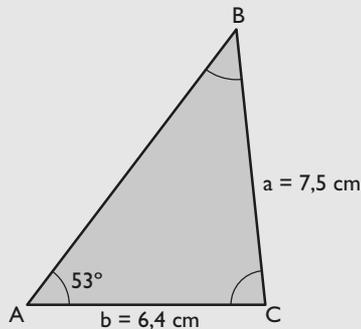
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 9,5 \text{ m}$	B	$B = 180^\circ - (A + C)$	$B = 180^\circ - (32^\circ + 93^\circ) = 55^\circ$
$A = 32^\circ$	a	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \text{sen } A}{\text{sen } B}$	$a = \frac{9,5 \cdot \text{sen } 32^\circ}{\text{sen } 55^\circ} = 6,15 \text{ m}$
$C = 93^\circ$	c	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } C}{\text{sen } A}$	$c = \frac{6,15 \cdot \text{sen } 93^\circ}{\text{sen } 32^\circ} = 11,59 \text{ m}$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \text{ sen } C$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 6,15 \cdot 9,5 \cdot \text{sen } 93^\circ = 29,17 \text{ m}^2$

17. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 7,5 \text{ cm}$, $b = 6,4 \text{ cm}$ y $A = 53^\circ$

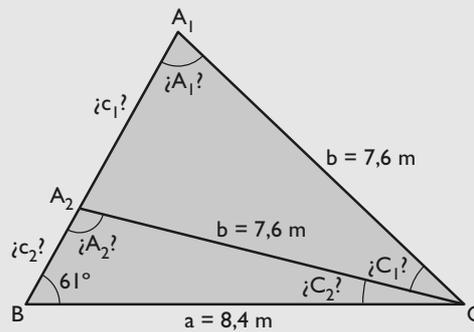
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 7,5 \text{ cm}$	B	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{b \cdot \text{sen } A}{a}$	$\text{sen } B = \frac{6,4 \cdot \text{sen } 53^\circ}{7,5} = B_1 = 42^\circ 57' 40''$
$b = 6,4 \text{ cm}$			Como el ángulo suplementario de B_1 tiene el mismo seno, puede existir un B_2
$A = 53^\circ$	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$B_2 = 180^\circ - 42^\circ 57' 40'' = 137^\circ 2' 20''$ (No es válido)
	c	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } C}{\text{sen } A}$	$C = 180^\circ - (53^\circ + 42^\circ 57' 40'') = 84^\circ 2' 20''$ $c = \frac{7,5 \cdot \text{sen } 84^\circ 2' 20''}{\text{sen } 53^\circ} = 9,34 \text{ cm}$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \text{ sen } C$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 6,4 \cdot \text{sen } 84^\circ = 23,87 \text{ cm}^2$

18. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 8,4$ m, $b = 7,6$ m y $B = 61^\circ$

Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 8,4$ m $b = 7,6$ m $B = 61^\circ$	A	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{a \cdot \text{sen } B}{b}$	$\text{sen } A = \frac{8,4 \cdot \text{sen } 61^\circ}{7,6} = A_1 = 75^\circ 10' 8''$ Como el ángulo suplementario de A_1 tiene el mismo seno, puede existir un A_2 $A_2 = 180^\circ - 75^\circ 10' 8'' = 104^\circ 49' 52''$
	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C_1 = 180^\circ - (75^\circ 10' 8'' + 61^\circ) = 43^\circ 49' 52''$ $C_2 = 180^\circ - (104^\circ 49' 52'' + 61^\circ) = 14^\circ 10' 8''$
	c	$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \frac{b \cdot \text{sen } C}{\text{sen } B}$	$c_1 = \frac{7,6 \cdot \text{sen } 43^\circ 49' 52''}{\text{sen } 61^\circ} = 6,02$ m $c_2 = \frac{7,6 \cdot \text{sen } 14^\circ 10' 8''}{\text{sen } 61^\circ} = 2,13$ m
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \text{sen } C$	$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 8,4 \cdot 7,6 \cdot \text{sen } 43^\circ 49' 52'' = 22,11$ m ² $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 8,4 \cdot 7,6 \cdot \text{sen } 14^\circ 10' 8'' = 7,81$ m ²

19. Resuelve un triángulo en el que se conocen:

$a = 7$ cm, $c = 5$ cm y $C = 65^\circ$

Solución:

$$\frac{7}{\text{sen } A} = \frac{5}{\text{sen } 65^\circ}$$

$$\text{sen } A = \frac{7 \cdot \text{sen } 65^\circ}{5} = 1,27$$

No tiene solución.

5. Tercer y cuarto casos de resolución de triángulos

■ Piensa y calcula

Clasifica los siguientes triángulos en posibles e imposibles. Razona la respuesta.

a) Triángulo 1: $a = 5$ m, $b = 7$ m, $c = 9$ m

b) Triángulo 2: $a = 5$ m, $b = 10$ m, $c = 20$ m

Solución:

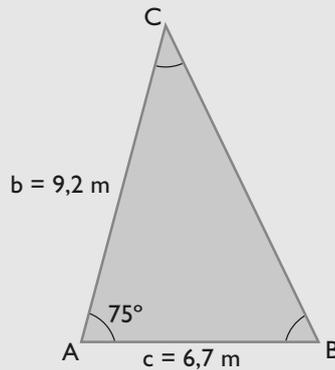
a) Es posible. $5 + 7 > 9$ La suma de los dos lados menores es superior al mayor.

b) Es imposible: $5 + 10 < 20$

● Aplica la teoría

20. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $b = 9,2 \text{ m}$, $c = 6,7 \text{ m}$ y $A = 75^\circ$

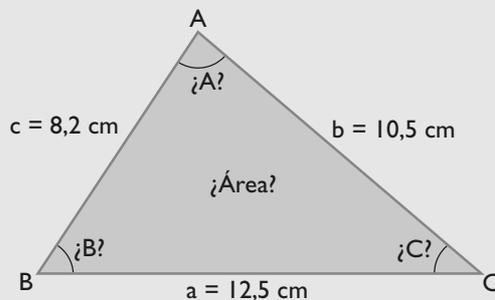
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 9,2 \text{ m}$ $c = 6,7 \text{ m}$ $A = 75^\circ$	a	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$	$a = \sqrt{9,2^2 + 6,7^2 - 2 \cdot 9,2 \cdot 6,7 \cdot \cos 75^\circ}$ $a = 9,88 \text{ m}$
	C	$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$	$\sin C = \frac{6,7 \cdot \sin 75^\circ}{9,88} \Rightarrow C = 40^\circ 55' 19''$
	B	$B = 180^\circ - (A + C)$	$B = 180^\circ - (75^\circ + 40^\circ 55' 19'')$ $B = 64^\circ 4' 41''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \sin A$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 9,2 \cdot 6,7 \cdot \sin 75^\circ = 29,77 \text{ m}^2$

21. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 12,5 \text{ cm}$, $b = 10,5 \text{ cm}$ y $c = 8,2 \text{ cm}$

Solución:



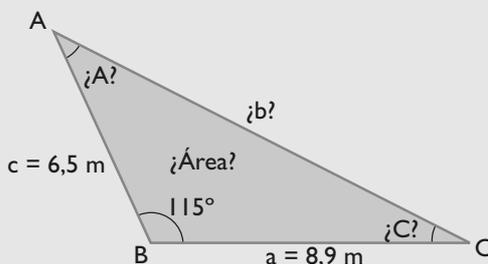
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 12,5 \text{ cm}$ $b = 10,5 \text{ cm}$ $c = 8,2 \text{ cm}$	A	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\cos A = \frac{10,5^2 + 8,2^2 - 12,5^2}{2 \cdot 10,5 \cdot 8,2}$ $A = 82^\circ 54' 53''$
	B	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$	$\sin B = \frac{10,5 \cdot \sin 82^\circ 54' 53''}{12,5}$ $B = 56^\circ 28' 8''$
	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C = 180^\circ - (82^\circ 54' 53'' + 56^\circ 28' 8'')$ $C = 40^\circ 36' 59''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \sin C$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 12,5 \cdot 10,5 \cdot \sin 40^\circ 36' 59''$ $\text{Área} = 42,72 \text{ cm}^2$

22. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 5,3$ cm, $b = 9,5$ cm y $c = 4,1$ cm
¿Cuántas soluciones tiene?

Solución: No tiene solución porque $5,3 + 4,1 < 9,5$

23. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 8,9$ m, $c = 6,5$ m y $B = 115^\circ$

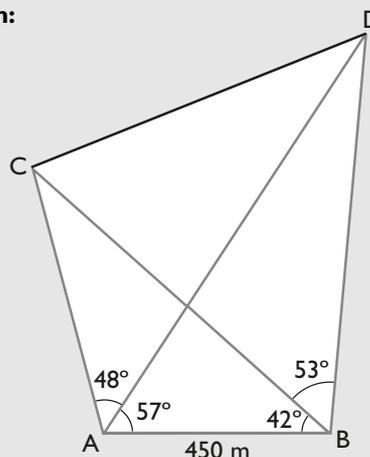
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 8,9$ m $c = 6,5$ m $B = 115^\circ$	b A C Área	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b}$ $C = 180^\circ - (A + B)$ $\text{Área} = \frac{1}{2} ac \sin B$	$b = \sqrt{8,9^2 + 6,5^2 - 2 \cdot 8,9 \cdot 6,5 \cdot \cos 115^\circ}$ $b = 13,05$ m $\sin A = \frac{8,9 \cdot \sin 115^\circ}{13,05} \Rightarrow A = 38^\circ 10' 38''$ $C = 180^\circ - (38^\circ 10' 38'' + 115^\circ)$ $C = 26^\circ 49' 22''$ $\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 8,9 \cdot 6,5 \cdot \sin 115^\circ = 26,21$ m ²

24. Halla la distancia que hay entre dos barcos C y D, sabiendo que hemos medido la distancia que hay entre A y B y hemos obtenido 450 m, y que con el teodolito hemos obtenido que $CAD = 48^\circ$, $BAD = 57^\circ$, $ABC = 42^\circ$ y $CBD = 53^\circ$

Solución:

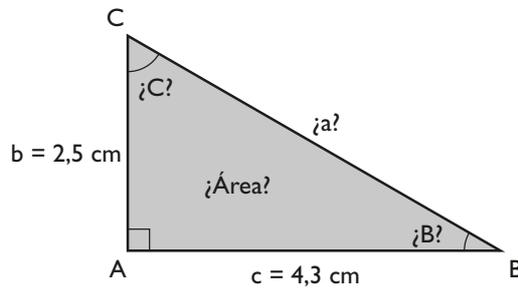


a) En el triángulo ABC se calcula AC	$ACB = 180^\circ - (48^\circ + 57^\circ + 42^\circ) = 33^\circ$ $\frac{450}{\sin 33^\circ} = \frac{AC}{\sin 42^\circ} \Rightarrow AC = \frac{450 \cdot \sin 42^\circ}{\sin 33^\circ} = 553$ m
b) En el triángulo ABD se calcula AD	$ADB = 180^\circ - (57^\circ + 42^\circ + 53^\circ) = 28^\circ$ $\frac{450}{\sin 28^\circ} = \frac{AD}{\sin 95^\circ} \Rightarrow AD = \frac{450 \cdot \sin 95^\circ}{\sin 28^\circ} = 955$ m
c) En el triángulo ACD se calcula CD	$CD^2 = 553^2 + 955^2 - 2 \cdot 553 \cdot 955 \cdot \cos 48^\circ$ $CD = 715$ m

Ejercicios y problemas

1. Resolución de triángulos rectángulos

25. En un triángulo rectángulo se conocen los dos catetos $b = 2,5$ cm y $c = 4,3$ cm. Calcula los demás elementos.

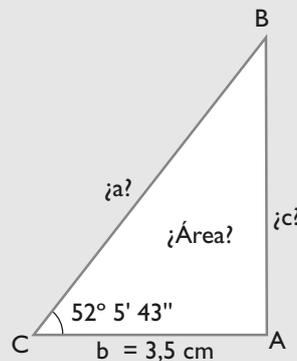


Solución:

Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 2,5$ cm	a	$a^2 = b^2 + c^2$	$a = 4,97$ cm
$c = 4,3$ cm	B	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} B = \frac{2,5}{4,3} \Rightarrow B = 30^\circ 10' 25''$
	C	$C = 90^\circ - B$	$C = 59^\circ 49' 35''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 4,3 = 5,38$ cm ²

26. En un triángulo rectángulo se conocen un ángulo agudo, $C = 52^\circ 5' 43''$, y el cateto contiguo, $b = 3,5$ cm. Calcula los demás elementos.

Solución:



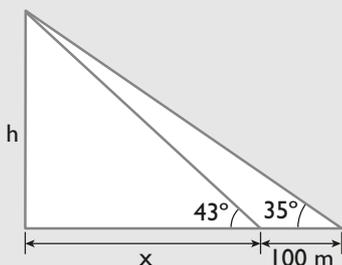
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 3,5$ cm	B	$B = 90^\circ - C$	$B = 90^\circ - 52^\circ 5' 43'' = 37^\circ 54' 17''$
$C = 52^\circ 5' 43''$	a	$\cos C = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\cos C}$	$a = \frac{3,5}{\cos 52^\circ 5' 43''} = 5,7$ cm
	c	$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \operatorname{tg} C$	$c = 3,5 \cdot \operatorname{tg} 52^\circ 5' 43'' = 4,5$ cm
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot c$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 4,5 = 7,88$ cm ²

Ejercicios y problemas

27. En el centro de un lago sale verticalmente un chorro de agua y se quiere medir su altura. Para ello se mide el ángulo de elevación desde la orilla a la parte más alta del chorro de agua y se obtiene 43° ; tras alejarse 100 m del lago, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtiene 35° . Calcula la altura del chorro de agua.



Solución:



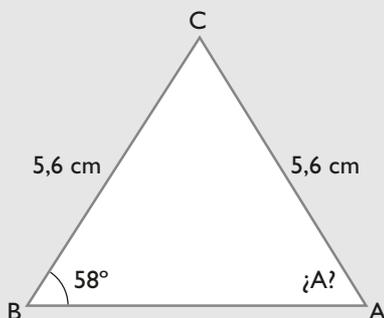
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 43^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 35^\circ &= \frac{h}{100 + x} \end{aligned} \right\} h = 281,07$$

Altura = 281,07 m

2. Teorema de los senos

28. En un triángulo se conocen:
 $a = 5,6$ cm, $b = 5,6$ cm y $B = 58^\circ$
 Calcula mentalmente el ángulo **A**. ¿Cuántas soluciones tiene?

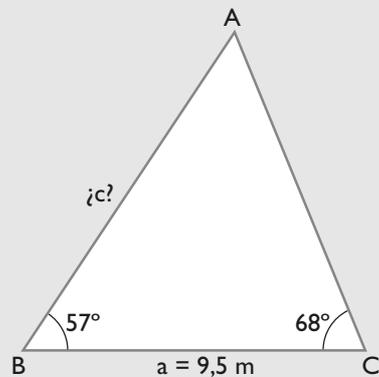
Solución:



El triángulo es isósceles.
 $A = 58^\circ$
 La solución es única.

29. En un triángulo se conocen:
 $a = 9,5$ m, $B = 57^\circ$ y $C = 68^\circ$
 Calcula el lado **c**. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:



$$A = 180^\circ - (57^\circ + 68^\circ) = 55^\circ$$

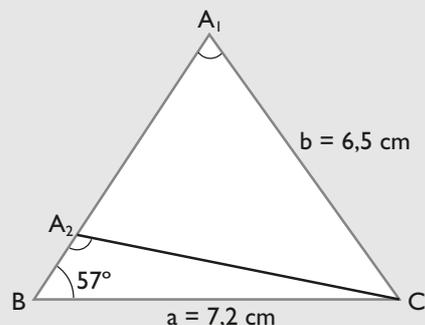
$$\frac{9,5}{\operatorname{sen} 55^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 68^\circ}$$

$$c = \frac{9,5 \cdot \operatorname{sen} 68^\circ}{\operatorname{sen} 55^\circ} = 10,75 \text{ m}$$

Hay una solución.

30. En un triángulo se conocen:
 $a = 7,2$ cm, $b = 6,5$ cm y $B = 57^\circ$
 Calcula el ángulo **A**. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:



$$\frac{7,2}{\operatorname{sen} A} = \frac{6,5}{\operatorname{sen} 57^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{7,2 \cdot \operatorname{sen} 57^\circ}{6,5}$$

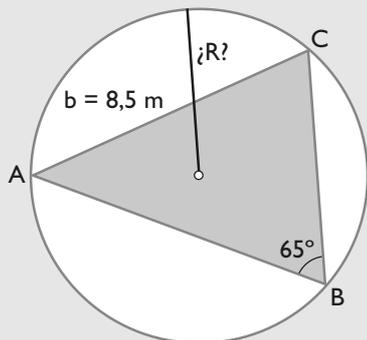
$$A_1 = 68^\circ 16' 40'' \Rightarrow A_1 + B < 180^\circ$$

$$A_2 = 111^\circ 43' 20'' \Rightarrow A_2 + B < 180^\circ$$

Tiene dos soluciones.

31. De un triángulo se conocen:
 $b = 8,5$ m y $B = 65^\circ$
 Halla la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

Solución:



$$D = 8,5 / \sin 65^\circ = 9,38 \text{ m}$$

$$R = 9,38 / 2 = 4,69 \text{ m}$$

32. En un triángulo se conocen: $b = 7 \text{ cm}$, $c = 8,5 \text{ cm}$ y $B = 92^\circ$
 Calcula el ángulo **C**. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:

$$\frac{7}{\sin 92^\circ} = \frac{8,5}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{8,5 \cdot \sin 92^\circ}{7} = 1,21$$

No tiene solución porque $\sin C = 1,21 > 1$

33. En un triángulo se conocen:
 $c = 7,5 \text{ m}$, $B = 125^\circ$ y $C = 73^\circ$
 Calcula el lado **b**. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:

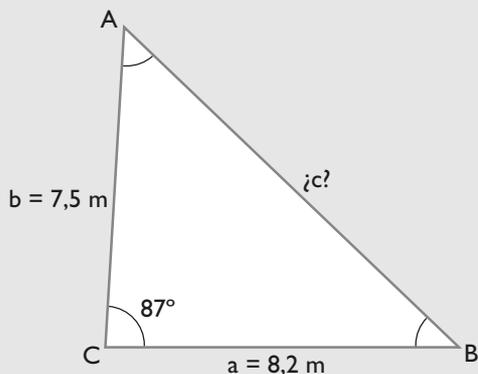
$$B + C = 125^\circ + 73^\circ = 198^\circ > 180^\circ$$

No tiene solución.

3. Teorema del coseno

34. En un triángulo se conocen:
 $a = 8,2 \text{ m}$, $b = 7,5 \text{ m}$ y $C = 87^\circ$
 Calcula el lado **c**

Solución:



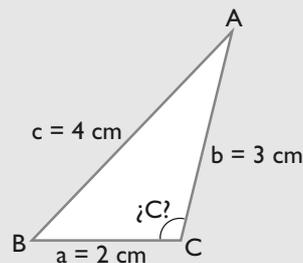
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c = \sqrt{8,2^2 + 7,5^2 - 2 \cdot 8,2 \cdot 7,5 \cdot \cos 87^\circ}$$

$$c = 10,82 \text{ m}$$

35. En un triángulo se conocen los tres lados:
 $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ y $c = 4 \text{ cm}$
 Calcula el ángulo **C**

Solución:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

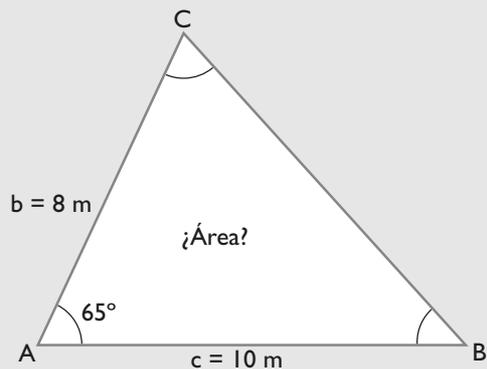
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos C = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$C = 104^\circ 28' 39''$$

36. En un triángulo se conocen:
 $b = 8 \text{ m}$, $c = 10 \text{ m}$ y $A = 65^\circ$
 Calcula su área.

Solución:



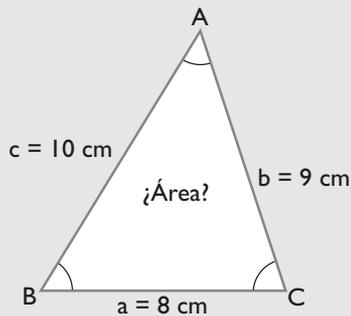
$$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sin 65^\circ = 36,25 \text{ m}^2$$

37. En un triángulo se conocen los tres lados:
 $a = 8 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$ y $c = 10 \text{ cm}$
 Calcula el área.

Ejercicios y problemas

Solución:



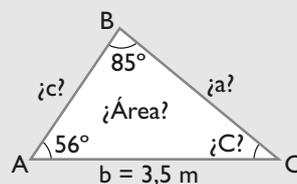
$$\text{Semiperímetro} = 13,5$$

$$\text{Área} = \sqrt{13,5(13,5 - 8)(13,5 - 9)(13,5 - 10)} = 34,2 \text{ cm}^2$$

4. Resolución de triángulos no rectángulos

38. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $b = 3,5 \text{ m}$, $A = 56^\circ$ y $B = 85^\circ$

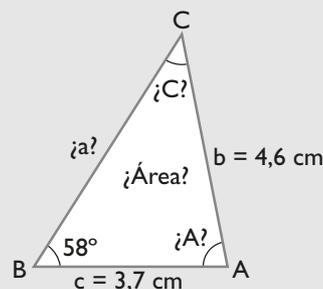
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 3,5 \text{ m}$ $A = 56^\circ$ $B = 85^\circ$	C a c Área	$C = 180^\circ - (A + B)$ $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \text{sen } A}{\text{sen } B}$ $\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \frac{b \cdot \text{sen } C}{\text{sen } B}$ $\text{Área} = \frac{1}{2} ab \text{ sen } C$	$C = 180^\circ - (56^\circ + 85^\circ) = 39^\circ$ $a = \frac{3,5 \cdot \text{sen } 56^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = 2,91 \text{ m}$ $c = \frac{3,5 \cdot \text{sen } 39^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = 2,21 \text{ m}$ $\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2,91 \cdot 3,5 \cdot \text{sen } 39^\circ = 3,2 \text{ m}^2$

39. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $b = 4,6 \text{ cm}$, $c = 3,7 \text{ cm}$ y $B = 58^\circ$

Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$b = 4,6 \text{ cm}$ $c = 3,7 \text{ cm}$ $B = 58^\circ$	C A a Área	$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } C = \frac{c \cdot \text{sen } B}{b}$ $A = 180^\circ - (B + C)$ $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \text{sen } A}{\text{sen } B}$ $\text{Área} = \frac{1}{2} ac \text{ sen } B$	$\text{sen } C = \frac{3,7 \cdot \text{sen } 58^\circ}{4,6} \Rightarrow C_1 = 43^\circ 36''$ Como el ángulo suplementario de C_1 tiene el mismo seno, puede existir un C_2 $C_2 = 180^\circ - 43^\circ 36'' = 136^\circ 59' 24''$ (No es válido) $A = 180^\circ - (58^\circ + 43^\circ 36'') = 78^\circ 59' 24''$ $a = \frac{4,6 \cdot \text{sen } 78^\circ 59' 24''}{\text{sen } 58^\circ} = 5,32 \text{ cm}$ $A = \frac{1}{2} \cdot 5,32 \cdot 3,7 \cdot \text{sen } 58^\circ = 8,35 \text{ cm}^2$

40. Resuelve un triángulo en el que se conocen:

$$b = 5,2 \text{ m}$$

$$c = 4,3 \text{ m}$$

$$C = 73^\circ$$

¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:

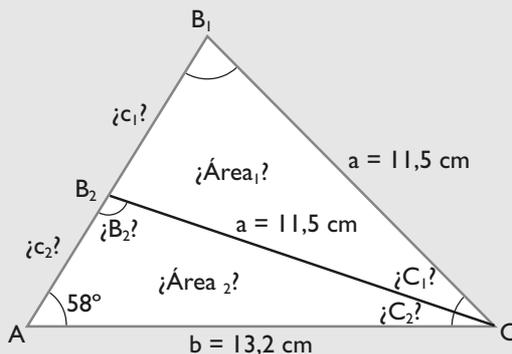
$$\frac{5,2}{\text{sen } B} = \frac{4,3}{\text{sen } 73^\circ}$$

$$\text{sen } B = \frac{5,2 \cdot \text{sen } 73^\circ}{4,3} = 1,16$$

No tiene solución porque $\text{sen } B = 1,16 > 1$

41. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 11,5 \text{ cm}$, $b = 13,2 \text{ cm}$ y $A = 58^\circ$

Solución:

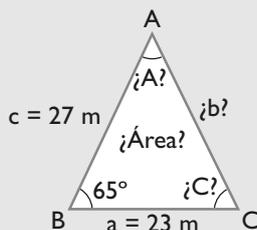


Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 11,5 \text{ cm}$ $b = 13,2 \text{ cm}$ $A = 58^\circ$	B	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{b \cdot \text{sen } A}{a}$	$\text{sen } B = \frac{13,2 \cdot \text{sen } 58^\circ}{11,5} \Rightarrow B_1 = 76^\circ 45' 29''$ Como el ángulo suplementario de B_1 tiene el mismo seno, puede existir un B_2 $B_2 = 180^\circ - 76^\circ 45' 29'' = 103^\circ 14' 31''$
	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C_1 = 180^\circ - (58^\circ + 76^\circ 45' 29'') = 45^\circ 14' 31''$ $C_2 = 180^\circ - (58^\circ + 103^\circ 14' 31'') = 18^\circ 45' 29''$
	c	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } C}{\text{sen } A}$	$c_1 = \frac{11,5 \cdot \text{sen } 45^\circ 14' 31''}{\text{sen } 58^\circ} = 9,63 \text{ cm}$ $c_2 = \frac{11,5 \cdot \text{sen } 18^\circ 45' 29''}{\text{sen } 58^\circ} = 4,36 \text{ cm}$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \text{sen } C$	$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 11,5 \cdot 13,2 \cdot \text{sen } 45^\circ 14' 31'' = 53,9 \text{ cm}^2$ $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 11,5 \cdot 13,2 \cdot \text{sen } 18^\circ 45' 29'' = 24,41 \text{ cm}^2$

5. Tercer y cuarto casos de resolución de triángulos

42. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 23 \text{ m}$, $c = 27 \text{ m}$ y $B = 65^\circ$

Solución:

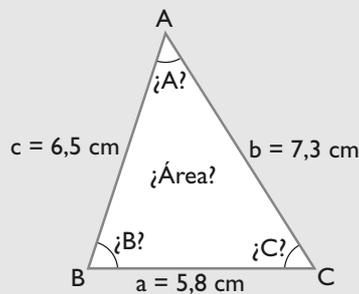


Ejercicios y problemas

Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 23 \text{ m}$	b	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$	$b = \sqrt{23^2 + 27^2 - 2 \cdot 23 \cdot 27 \cdot \cos 65^\circ}$ $b = 27,08 \text{ m}$
$c = 27 \text{ m}$	A	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b}$	$\sin A = \frac{23 \cdot \sin 65^\circ}{27,08} \Rightarrow A = 50^\circ 19' 56''$
$B = 65^\circ$	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C = 180^\circ - (50^\circ 19' 56'' + 65^\circ)$ $C = 64^\circ 40' 4''$
	Área	Área = $\frac{1}{2} ac \sin B$	Área = $\frac{1}{2} \cdot 23 \cdot 27 \cdot \sin 65^\circ = 281,41 \text{ m}^2$

43. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 5,8 \text{ cm}$, $b = 7,3 \text{ cm}$ y $c = 6,5 \text{ cm}$

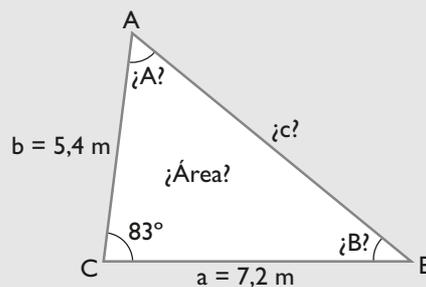
Solución:



Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 5,8 \text{ cm}$	A	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\cos A = \frac{7,3^2 + 6,5^2 - 5,8^2}{2 \cdot 7,3 \cdot 6,5}$ $A = 49^\circ 17' 15''$
$b = 7,3 \text{ cm}$	B	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$	$\sin B = \frac{7,3 \cdot \sin 49^\circ 17' 15''}{5,8}$ $B = 72^\circ 33' 31''$
$c = 6,5 \text{ cm}$	C	$C = 180^\circ - (A + B)$	$C = 180^\circ - (49^\circ 17' 15'' + 72^\circ 33' 31'')$ $C = 58^\circ 9' 14''$
	Área	Área = $\frac{1}{2} ab \sin C$	Área = $\frac{1}{2} \cdot 5,8 \cdot 7,3 \cdot \sin 58^\circ 9' 14''$ Área = $17,98 \text{ cm}^2$

44. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 7,2 \text{ m}$, $b = 5,4 \text{ m}$ y $C = 83^\circ$

Solución:



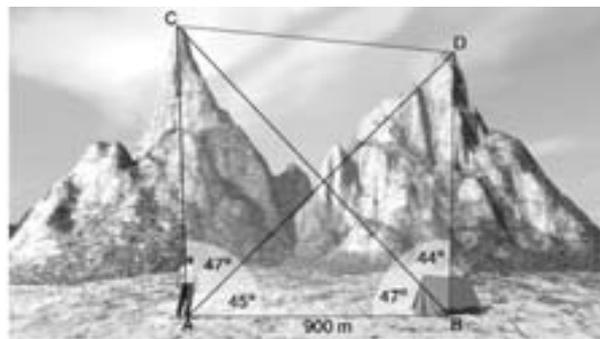
Datos	Incógnitas	Fórmulas	Resolución
$a = 7,2 \text{ m}$	c	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$	$c = \sqrt{7,2^2 + 5,4^2 - 2 \cdot 7,2 \cdot 5,4 \cdot \cos 83^\circ}$ $c = 8,46 \text{ m}$
$b = 5,4 \text{ m}$	A	$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c}$	$\sin A = \frac{7,2 \cdot \sin 83^\circ}{8,46} \Rightarrow A = 57^\circ 38' 31''$
$C = 83^\circ$	B	$B = 180^\circ - (A + C)$	$B = 180^\circ - (57^\circ 38' 31'' + 83^\circ)$ $B = 39^\circ 21' 29''$
	Área	$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \sin C$	$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 7,2 \cdot 5,4 \cdot \sin 83^\circ = 19,3 \text{ m}^2$

45. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $a = 47 \text{ cm}$, $b = 52 \text{ cm}$ y $c = 99 \text{ cm}$. ¿Cuántas soluciones tiene?

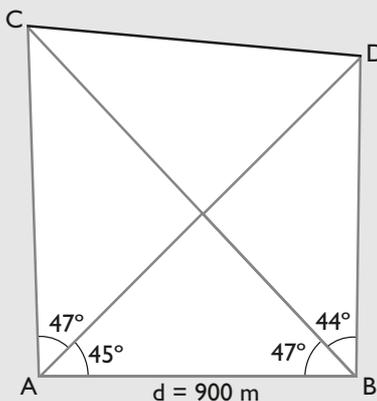
Solución:

No tiene solución porque $47 + 52 = 99$

46. Halla la distancia que hay entre los picos de dos montañas C y D, sabiendo que se ha medido en una llanura cercana la distancia que hay entre A y B y se ha obtenido 900 m, y que con el teodolito se ha obtenido que $CAD = 47^\circ$, $BAD = 45^\circ$, $ABC = 47^\circ$ y $CBD = 44^\circ$



Solución:

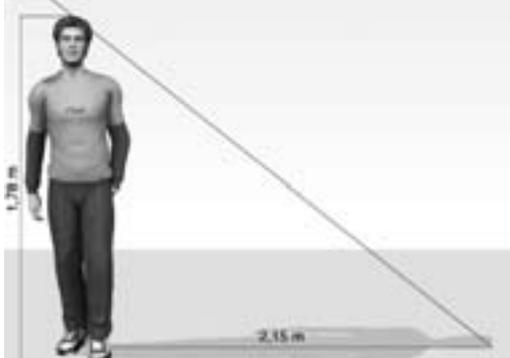


a) En el triángulo ABC se calcula AC	$ACB = 180^\circ - (47^\circ + 45^\circ + 47^\circ) = 41^\circ$ $\frac{900}{\sin 41^\circ} = \frac{AC}{\sin 47^\circ} \Rightarrow AC = \frac{900 \cdot \sin 47^\circ}{\sin 41^\circ} = 1003 \text{ m}$
b) En el triángulo ABD se calcula AD	$ADB = 180^\circ - (45^\circ + 47^\circ + 44^\circ) = 44^\circ$ $\frac{900}{\sin 44^\circ} = \frac{AD}{\sin 91^\circ} \Rightarrow AD = \frac{900 \cdot \sin 91^\circ}{\sin 44^\circ} = 1295 \text{ m}$
c) En el triángulo ACD se calcula CD	$CD^2 = 1003^2 + 1295^2 - 2 \cdot 1003 \cdot 1295 \cdot \cos 47^\circ$ $CD = 955 \text{ m}$

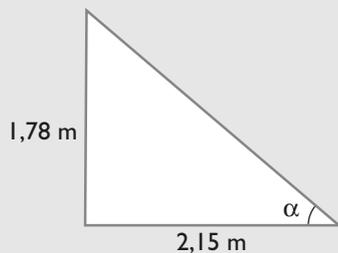
Ejercicios y problemas

Para ampliar

47. Una persona que mide 1,78 m proyecta una sombra de 2,15 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol en ese momento?



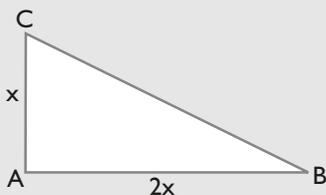
Solución:



Ángulo de elevación = α
 $\text{tg } \alpha = 1,78/2,15$
 $\alpha = 39^\circ 37' 18''$

48. En un triángulo rectángulo, un cateto mide el doble que el otro. Calcula la amplitud de sus ángulos agudos.

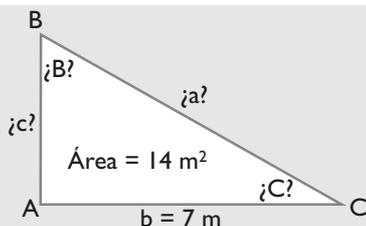
Solución:



$\text{tg } B = 1/2 \Rightarrow B = 26^\circ 33' 54''$
 $C = 63^\circ 26' 6''$

49. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 7 m y el área 14 m^2 . Halla los demás elementos del triángulo rectángulo.

Solución:



$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c$$

$$14 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot c \Rightarrow c = 4 \text{ m}$$

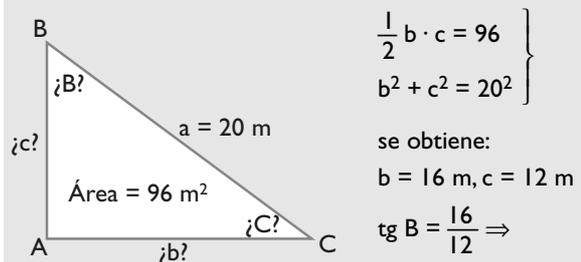
$$\text{tg } B = 7/4 \Rightarrow B = 60^\circ 15' 18''$$

$$C = 29^\circ 44' 42''$$

$$a = \sqrt{7^2 + 4^2} = 8,06 \text{ m}$$

50. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 20 m y el área 96 m^2 . Halla los demás elementos del triángulo rectángulo.

Solución:



$$\frac{1}{2} b \cdot c = 96$$

$$b^2 + c^2 = 20^2$$

se obtiene:

$$b = 16 \text{ m}, c = 12 \text{ m}$$

$$\text{tg } B = \frac{16}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 53^\circ 7' 48'', C = 36^\circ 52' 12''$$

51. Calcula mentalmente el radio de una circunferencia circunscrita a un triángulo en el que un lado mide 7 m y el ángulo opuesto 30° .

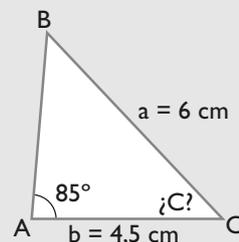
Solución:

$$D = \frac{7}{\text{sen } 30^\circ} = 7 : \frac{1}{2} = 7 \cdot 2 = 14 \text{ m}$$

$$\text{Radio} = 14/2 = 7 \text{ m}$$

52. En un triángulo se conocen: $a = 6 \text{ cm}$, $b = 4,5 \text{ cm}$ y $A = 85^\circ$. Calcula el ángulo **C**. ¿Cuántas soluciones tiene?

Solución:



$$\frac{6}{\text{sen } 85^\circ} = \frac{4,5}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{4,5 \cdot \text{sen } 85^\circ}{6}$$

$$B_1 = 48^\circ 20' 38''$$

$$B_2 = 131^\circ 39' 22'' \text{ (No es válido)}$$

$$C = 46^\circ 39' 22''$$

Tiene una solución.

Problemas

53. Una cinta transportadora de carbón llega desde un puerto de mar hasta una central térmica; si la cinta mide 350 m y se quiere que eleve el carbón a 50 m de altura, ¿qué ángulo de elevación debe llevar la cinta?



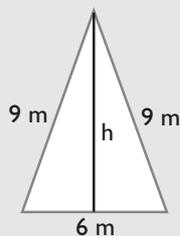
Solución:



Ángulo de elevación = x
 $\text{sen } x = 50/350$
 $x = 8^\circ 12' 48''$

54. Dado un triángulo isósceles en que los lados iguales miden 9 m y el desigual 6 m, calcula la altura relativa al lado desigual.

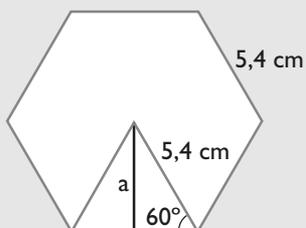
Solución:



$$\text{Altura} = h = \sqrt{9^2 - 3^2} = 8,49 \text{ m}$$

55. Calcula la apotema y el área de un hexágono regular cuyo lado mide 5,4 cm

Solución:



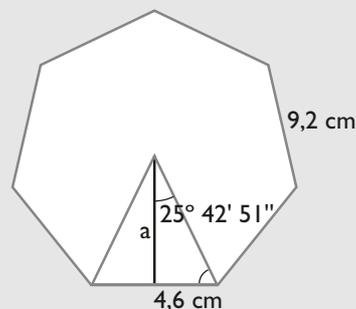
$$\text{sen } 60^\circ = \frac{a}{5,4}$$

$$a = 5,4 \text{ sen } 60^\circ = 4,68 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 5,4 \cdot 4,68}{2} = 78,82 \text{ cm}^2$$

56. Calcula la apotema y el área de un heptágono regular cuyo lado mide 9,2 cm

Solución:

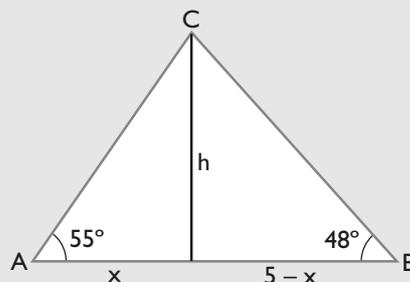


$$\text{tg } 25^\circ 42' 51'' = \frac{4,6}{a} \Rightarrow a = \frac{4,6}{\text{tg } 25^\circ 42' 51''} = 9,55 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{7 \cdot 9,2 \cdot 9,55}{2} = 307,51 \text{ cm}^2$$

57. Dos personas están en una playa y ven un globo desde los puntos A y B, de forma que las dos personas y el globo están en un plano perpendicular al suelo. La distancia entre las dos personas es de 5 km, el ángulo de elevación del globo desde el punto A es de 55° , y desde el punto B, de 48° . Calcula la altura a la que se encuentra el globo.

Solución:



Resolviendo el sistema:

$$\text{tg } 55^\circ = h/x$$

$$\text{tg } 48^\circ = \frac{h}{(5-x)}$$

se obtiene:

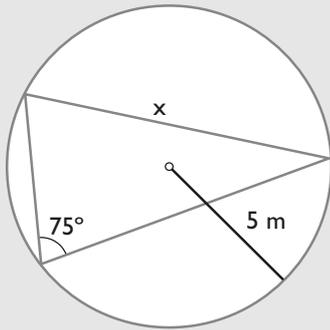
$$x = 2,187 \text{ km}$$

$$h = 3,124 \text{ km}$$

58. Un ángulo de un triángulo mide de amplitud 75° y el radio de la circunferencia circunscrita mide 5 m. Halla la medida del lado opuesto al ángulo dado.

Ejercicios y problemas

Solución:



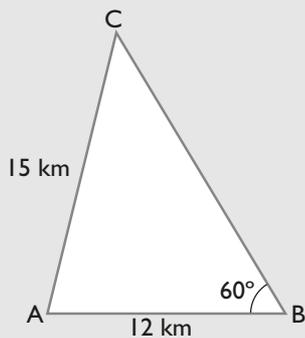
$$\frac{x}{\sin 75^\circ} = 2R$$

$$x = 10 \cdot \sin 75^\circ = 9,66 \text{ m}$$

59. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas que forman un triángulo; la distancia de A hasta B es de 12 km, de A hasta C de 15 km y el ángulo ABC mide 60° . Calcula la distancia del pueblo B al C



Solución:



$$\frac{15}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{12 \cdot \sin 60^\circ}{15} \Rightarrow C = 43^\circ 51' 14''$$

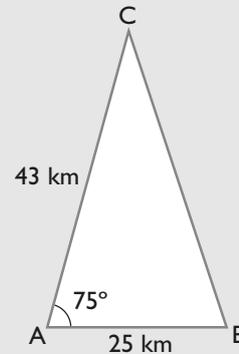
$$A = 180^\circ - (60^\circ + 43^\circ 51' 14'') = 76^\circ 8' 46''$$

$$\frac{BC}{\sin 76^\circ 8' 46''} = \frac{15}{\sin 60^\circ}$$

$$BC = \frac{15 \cdot \sin 76^\circ 8' 46''}{\sin 60^\circ} = 16,82 \text{ km}$$

60. Tres pueblos A, B y C están formando un triángulo. Si la distancia $AB = 25 \text{ km}$, distancia $AC = 43 \text{ km}$ y el ángulo que se forma en A es de 75° , ¿cuál es la distancia que hay entre los pueblos C y B?

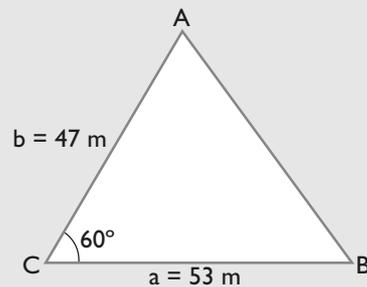
Solución:



$$CB = \sqrt{25^2 + 43^2 - 2 \cdot 25 \cdot 43 \cdot \cos 75^\circ} = 43,79 \text{ km}$$

61. Un solar tiene forma de triángulo, del que se conocen: $a = 53 \text{ m}$, $b = 47 \text{ m}$ y $C = 60^\circ$. Calcula el área del solar.

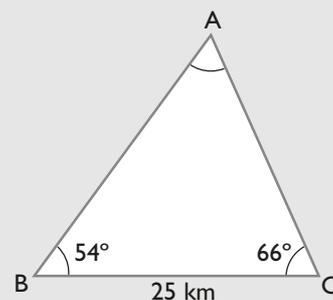
Solución:



$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 53 \cdot 47 \cdot \sin 60^\circ = 1\,078,63 \text{ m}^2$$

62. Una señal de socorro de un teléfono móvil A se escucha desde dos antenas B y C separadas entre sí 25 km, el ángulo B mide 54° y el ángulo C mide 66° . Calcula las distancias que hay desde cada una de las antenas B y C al teléfono móvil.

Solución:

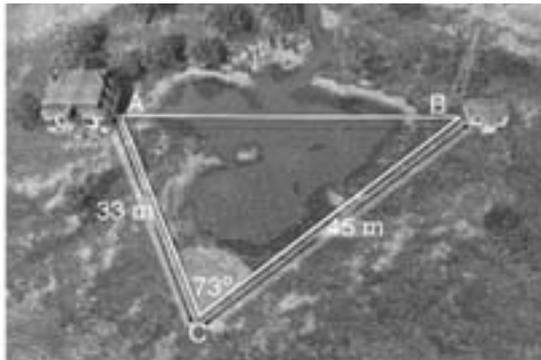


$$A = 180^\circ - (54^\circ + 66^\circ) = 60^\circ$$

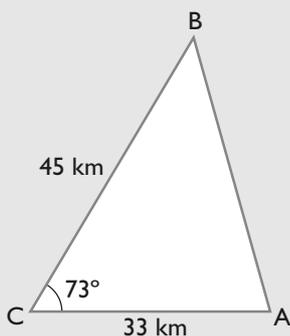
$$\frac{AB}{\sin 66^\circ} = \frac{25}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AB = \frac{25 \cdot \sin 66^\circ}{\sin 60^\circ} = 26,372 \text{ km}$$

$$\frac{AC}{\sin 54^\circ} = \frac{25}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{25 \cdot \sin 54^\circ}{\sin 60^\circ} = 23,354 \text{ km}$$

63. Dos torres de alta tensión A y B se encuentran separadas por un lago. Se toma un punto auxiliar C y se miden las distancias $AC = 33 \text{ m}$, $BC = 45 \text{ m}$ y el ángulo $C = 73^\circ$. Halla la distancia que hay entre dichas torres.



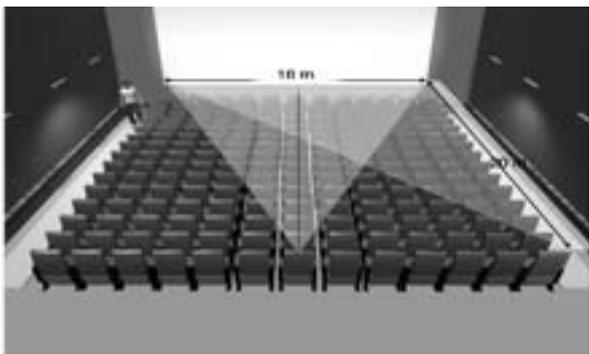
Solución:



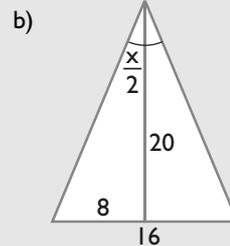
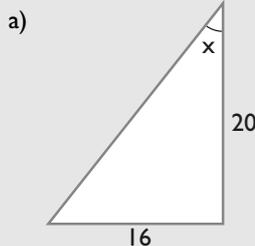
$$AB = \sqrt{33^2 + 45^2 - 2 \cdot 33 \cdot 45 \cdot \cos 73^\circ} = 47,39 \text{ m}$$

64. La pantalla de un cine ocupa una longitud de 16 m. Si la fila 15 está situada a 20 m de la pantalla, halla el ángulo bajo el que ve un espectador la pantalla y di en qué lugar tendrá mejor visión si está colocado en:

- una butaca totalmente lateral.
- una butaca totalmente centrada.



Solución:



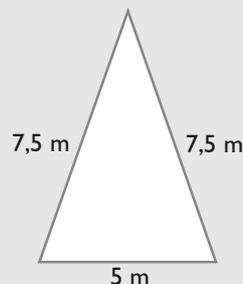
a) $\text{tg } x = 16/20 \Rightarrow x = 38^\circ 39' 35''$

b) $\text{tg } x/2 = 8/20 \Rightarrow x/2 = 21^\circ 48' 5'' \Rightarrow x = 43^\circ 36' 10''$

Se ve mejor en una butaca centrada porque el ángulo es mayor.

65. Calcula el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden 7,5 m, y el desigual, 5 m

Solución:

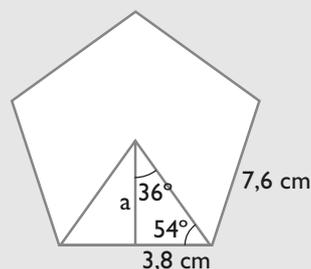


Semiperímetro = 10 m

$$\text{Área} = \sqrt{10(10 - 7,5)^2(10 - 5)} = 17,68 \text{ m}^2$$

66. Calcula el área de un pentágono regular cuyo lado mide 7,6 cm

Solución:



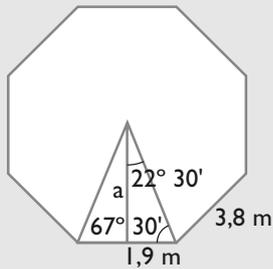
$$\text{tg } 54^\circ = \frac{a}{3,8} \Rightarrow a = 3,8 \cdot \text{tg } 54^\circ = 5,23 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{5 \cdot 7,6 \cdot 5,23}{2} = 99,37 \text{ cm}^2$$

67. Calcula el área de un octógono regular cuyo lado mide 3,8 m

Ejercicios y problemas

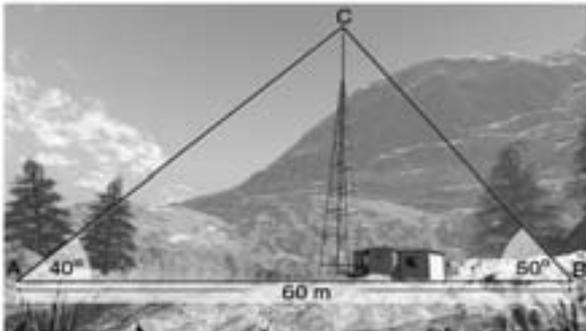
Solución:



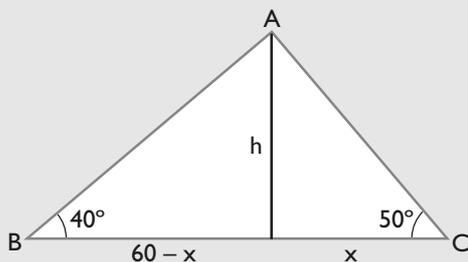
$$\operatorname{tg} 67^{\circ} 30' = \frac{a}{1,9} \Rightarrow a = 1,9 \cdot \operatorname{tg} 67^{\circ} 30' = 4,59 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{8 \cdot 3,8 \cdot 4,59}{2} = 69,77 \text{ m}^2$$

68. Una antena de radio está sujeta por dos cables que van desde la parte más alta al suelo. Los puntos de sujeción de los cables y el pie de la antena están alineados. Se han medido los ángulos que forma la horizontal con cada uno de los cables y son 40° y 50° . Sabiendo que la distancia entre los pies de los cables es de 60 m, calcula la altura de la antena.



Solución:



Resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 40^{\circ} &= h/(60 - x) \\ \operatorname{tg} 50^{\circ} &= h/x \end{aligned} \right\}$$

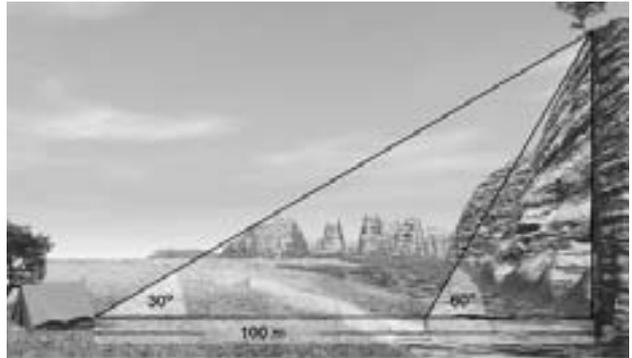
se obtiene:

$$x = 24,8 \text{ m}$$

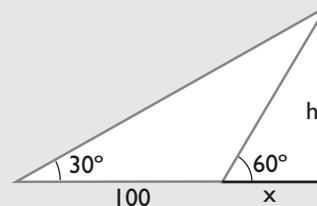
$$h = 29,5 \text{ m}$$

Para profundizar

69. En una llanura hay una montaña cortada verticalmente en una orilla de un río. Desde la otra orilla se ve el punto más alto de la montaña bajo un ángulo de 60° . Alejándose del río perpendicularmente 100 m, el ángulo de elevación mide 30° . Calcula:
- la anchura del río.
 - la altura de la montaña.



Solución:



Resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 60^{\circ} &= h/x \\ \operatorname{tg} 30^{\circ} &= h/(100 + x) \end{aligned} \right\}$$

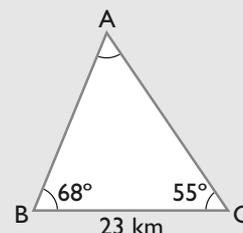
se obtiene:

$$x = 50 \text{ m}$$

$$h = 86,6 \text{ m}$$

70. Un barco A emite una señal de socorro que se recibe en dos estaciones de radio B y C. Se conocen los ángulos $\angle ABC = 68^{\circ}$, $\angle ACB = 55^{\circ}$ y la distancia entre las estaciones de radio, que es de 23 km. Calcula la distancia que hay desde el barco a cada una de las estaciones de radio.

Solución:

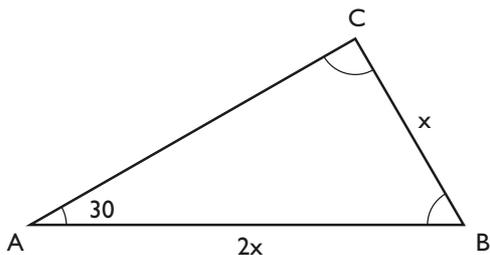


El ángulo A = $180^\circ - (68^\circ + 55^\circ) = 57^\circ$

$$\frac{AC}{\sin 68^\circ} = \frac{23}{\sin 57^\circ} \Rightarrow AC = \frac{23 \cdot \sin 68^\circ}{\sin 57^\circ} = 25,427 \text{ km}$$

$$\frac{AB}{\sin 55^\circ} = \frac{23}{\sin 57^\circ} \Rightarrow AB = \frac{23 \cdot \sin 55^\circ}{\sin 57^\circ} = 22,465 \text{ km}$$

71. En un triángulo uno de los lados es el doble de otro y el ángulo opuesto a este lado menor mide 30° . Calcula cuánto mide cada uno de los otros ángulos.



Solución:

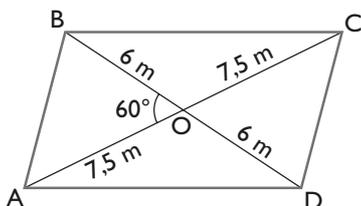
$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{2x}{\sin C}$$

$$\sin C = 2 \sin 30^\circ = 1$$

$$C = 90^\circ$$

$$B = 60^\circ$$

72. Las diagonales de un romboide miden 15 m y 12 m y forman un ángulo de 60° . Calcula cuánto miden los lados.



Solución:

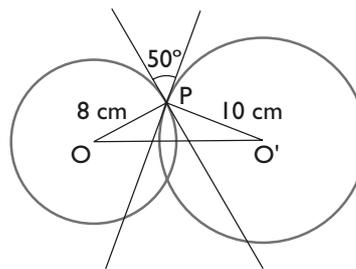
Aplicando el teorema del coseno en el triángulo AOB

$$AB = \sqrt{7,5^2 + 6^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ} = 6,87 \text{ m}$$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo AOD

$$AD = \sqrt{7,5^2 + 6^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ} = 11,72 \text{ m}$$

73. Dos circunferencias, cuyos radios son de 8 cm y 10 cm, se cortan. El ángulo que forman las tangentes respectivas en el punto de intersección mide 50° . Halla la distancia entre los dos centros de las circunferencias.



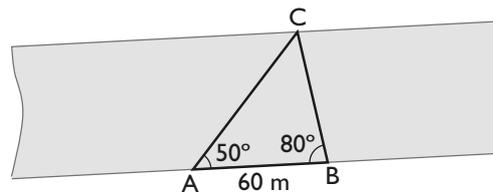
Solución:

$$\angle OPO' = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

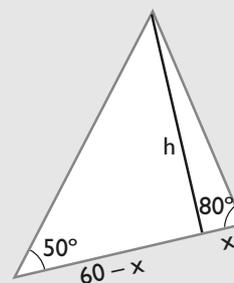
Aplicando el teorema del coseno en el triángulo OPO'

$$OO' = \sqrt{8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 130^\circ} = 16,34 \text{ cm}$$

74. Sobre una de las orillas paralelas de un río se han tomado dos puntos, A y B, a 60 m de distancia entre sí. Desde estos puntos se ha mirado un objeto, C, sobre la otra orilla. Las visuales desde los puntos A y B a C forman con la línea AB unos ángulos de 50° y 80° , respectivamente. Calcula la anchura del río.



Solución:



Resolviendo el sistema:

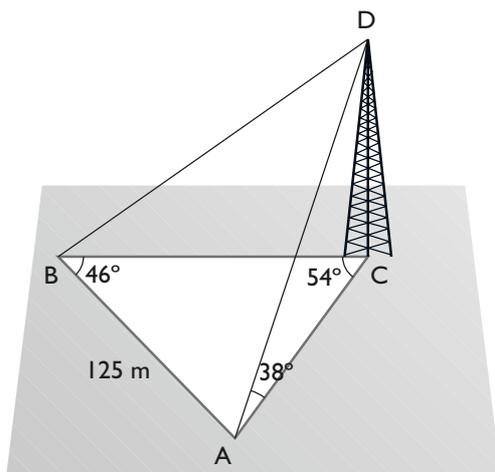
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 80^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 50^\circ &= \frac{h}{60 - x} \end{aligned} \right\}$$

se obtiene:

$$x = 10,42 \text{ m}$$

$$h = 59,09 \text{ m}$$

75. Se desea hallar desde el punto A la distancia a una torre y su altura. Por imposibilidad de medir la base sobre el plano vertical que pasa por A y D se han tomado las siguientes medidas. La longitud AB = 125 m en el plano horizontal. El ángulo de elevación desde A hasta D es de 38° ; y en el triángulo ABC, el ángulo B = 46° y el ángulo ACB = 54° . Halla la distancia AC y la altura CD.

**Solución:**

En el triángulo ABC:

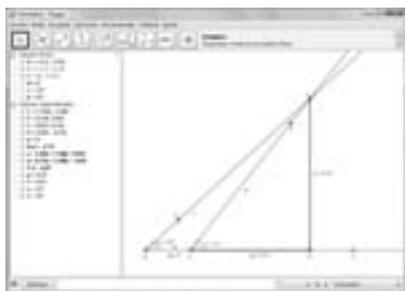
$$A = 180^\circ - (46^\circ + 54^\circ) = 80^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin 46^\circ} = \frac{125}{\sin 54^\circ} \Rightarrow AC = \frac{125 \cdot \sin 46^\circ}{\sin 54^\circ} = 111,14 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} 38^\circ = \frac{CD}{111,14} \Rightarrow CD = 111,14 \cdot \operatorname{tg} 38^\circ = 86,83 \text{ m}$$

Paso a paso**76. Medir la altura de una montaña**

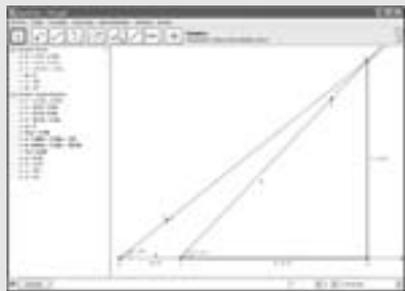
En la llanura, desde un punto cualquiera, se mide el ángulo B de elevación y se obtiene 43° ; tras acercarse a la montaña 200 m, se vuelve a medir el ángulo C de elevación y se obtiene 52° . Halla la altura de la montaña.

**Solución:**

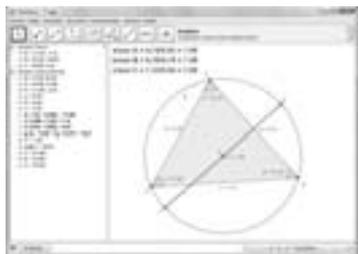
Resuelto en el libro del alumnado.

Geometría dinámica: interactividad

- Utiliza el mismo dibujo para calcular la anchura de un río sobre el que se ha medido el ángulo de elevación desde una orilla a la parte más alta de un árbol que está en la otra orilla, que ha resultado ser de 47° . Alejándose 3 m del río y volviendo a medir el ángulo de elevación, se obtiene 39°
- Cierra el documento.

Solución:

La anchura del río es: 9,25 m

77. Teorema de los senos**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

Geometría dinámica: interactividad

- Arrastra uno cualquiera de los vértices para modificar el triángulo. ¿Qué le sigue sucediendo al cociente que se obtiene al dividir cada lado por el seno del ángulo opuesto y el valor del diámetro?
- Cuando un ángulo es recto, ¿qué particularidad tiene el lado opuesto?
- Cierra el documento.

Solución:

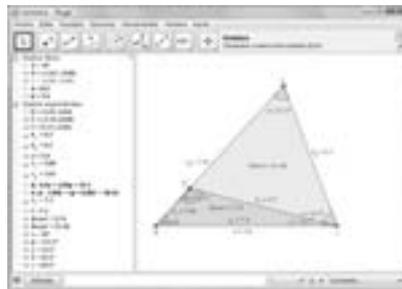
- El cociente es igual al diámetro.
- Es el diámetro de la circunferencia circunscrita.

78. Caso 2

Resuelve un triángulo en el que se conocen:

$$a = 6,2 \text{ cm}, b = 7,4 \text{ cm y } A = 48^\circ$$

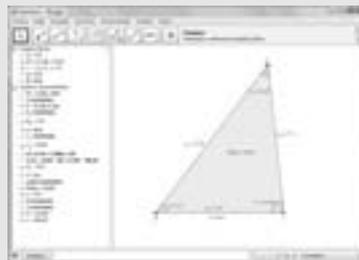
¿Cuántas soluciones tiene?

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

Geometría dinámica: interactividad

Edita los valores de los lados y del ángulo, pon $a = 7,5 \text{ cm}$, $b = 6,4 \text{ cm}$ y $A = 53^\circ$. ¿Cuántas soluciones hay?

Solución:

Hay una única solución.



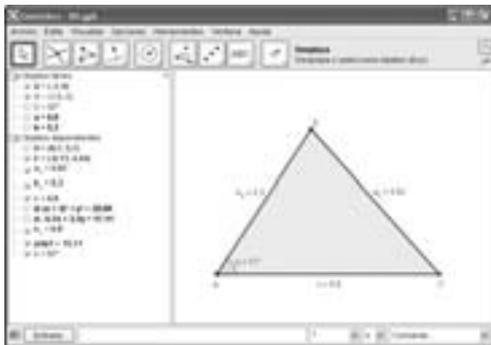
Practica

80. Teorema del coseno

Dibuja un triángulo en el que se conocen:

$$a = 6,8 \text{ cm}, b = 5,3 \text{ cm y } C = 57^\circ$$

Calcula el lado c



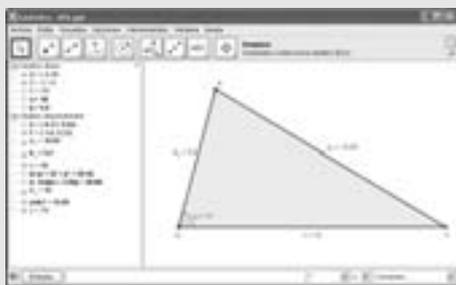
Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Geometría dinámica: interactividad

Edita los valores de los lados y del ángulo siguientes: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 5,4 \text{ cm}$ y $C = 75^\circ$. ¿Siguen siendo iguales los valores que se obtienen del lado c ?

Solución:



Los valores del lado c cambian.

81. Caso 1

Resuelve un triángulo en el que se conocen:

$$a = 6,4 \text{ cm}, B = 55^\circ \text{ y } C = 82^\circ$$

¿Cuántas soluciones tiene?



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Geometría dinámica: interactividad

Edita los valores del lado y de los ángulos siguientes: $a = 9,5 \text{ cm}$, $B = 47^\circ$ y $C = 93^\circ$. ¿Cuántas soluciones hay?

Solución:



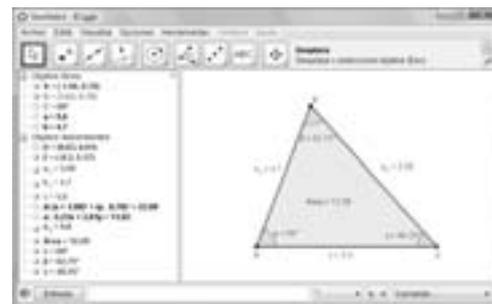
Solo hay una solución.

82. Caso 3

Resuelve un triángulo en el que se conocen:

$$a = 5,6 \text{ cm}, b = 4,7 \text{ cm y } C = 69^\circ$$

¿Cuántas soluciones tiene?



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Geometría dinámica: interactividad

Edita los valores de los lados y del ángulo siguientes: $a = 9,2 \text{ cm}$, $b = 6,7 \text{ cm}$ y $C = 75^\circ$. ¿Cuántas soluciones hay?

Solución:



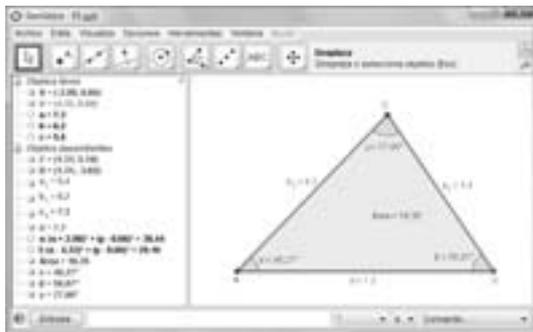
Solo hay una solución.

83. Caso 4

Resuelve un triángulo en el que se conocen:

$$a = 7,3 \text{ cm}, b = 6,2 \text{ cm y } c = 5,4 \text{ cm}$$

¿Cuántas soluciones tiene?



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Geometría dinámica: interactividad

- Edita los valores de los lados siguientes: $a = 12,5 \text{ cm}$, $b = 10,5 \text{ cm}$ y $c = 8,2 \text{ cm}$. ¿Cuántas soluciones hay?
- Edita los valores de los lados siguientes: $a = 5,3 \text{ cm}$, $b = 9,5 \text{ cm}$ y $c = 4,1 \text{ cm}$. ¿Cuántas soluciones hay?

Solución:

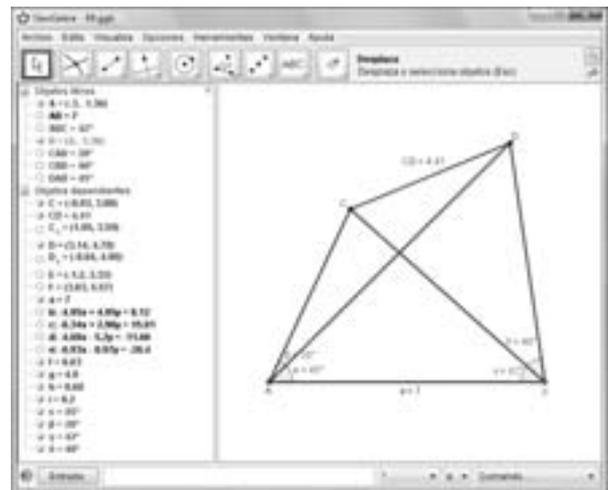
a)



b) No hay solución.

84. Cálculo de distancias entre dos puntos no accesibles

Halla la distancia que hay entre dos antenas C y D de telefonía móvil que están en la otra parte del río, sabiendo que se ha medido la distancia que hay entre A y B y se ha obtenido 700 m, y que con el teodolito se ha obtenido que $CAD = 20^\circ$, $DAB = 45^\circ$, $ABC = 35^\circ$ y $CBD = 40^\circ$

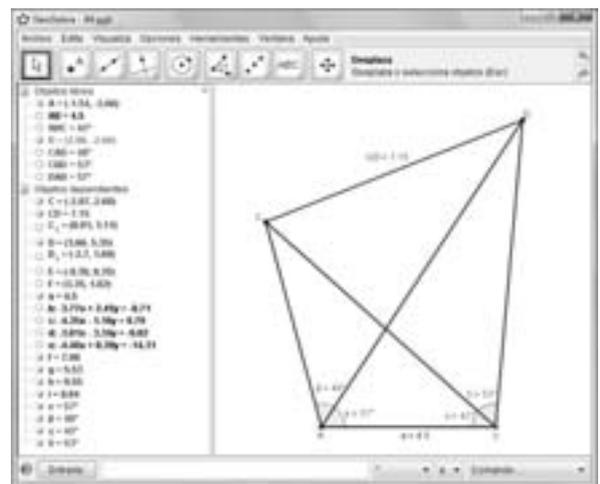


Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Geometría dinámica: interactividad

Utilizando el problema anterior, halla la distancia que hay entre dos barcos C y D, sabiendo que se ha medido la distancia entre A y B y se ha obtenido 450 m, y que con el teodolito se ha obtenido que $CAD = 48^\circ$, $DAB = 57^\circ$, $ABC = 42^\circ$ y $CBD = 53^\circ$



Solución:

$CD = 715 \text{ m}$