

7

Semejanza y trigonometría



1. Teorema de Thales

PIENSA Y CALCULA

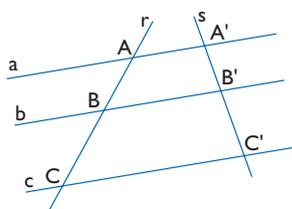
Si una persona que mide 1,70 m proyecta una sombra de 3,40 m y el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de un árbol mide 15 m, ¿cuánto mide de alto el árbol?

Solución:

Se observa que el objeto mide la mitad que la sombra; por tanto, el árbol mide $15 : 2 = 7,5$ m

APLICA LA TEORÍA

- 1** Sabiendo que en el siguiente dibujo $AB = 18$ cm, $BC = 24$ cm y $A'B' = 15$ cm, halla la longitud del segmento $B'C'$. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{15}{18} = \frac{B'C'}{24}$$

$$B'C' = 20 \text{ cm}$$

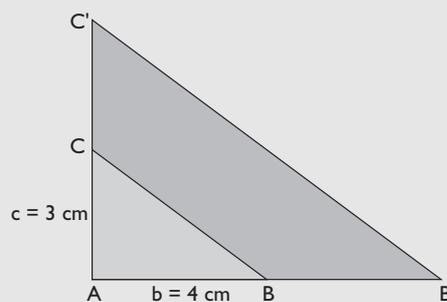
Hemos aplicado el teorema de Thales.

- 2** Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4 cm y 3 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo en posición de Thales de forma que el cateto mayor mida 8 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Solución:

$$r = 8 : 4 = 2$$

$$c' = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$



- 3** Dos ángulos de un triángulo miden 45° y 60° y otros dos ángulos de otro triángulo miden 75° y 60° . ¿Son semejantes ambos triángulos?

Solución:

El 3^{er} ángulo del 1^{er} triángulo mide:

$$180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

Es decir, los ángulos del 1^{er} triángulo miden:

$$45^\circ, 60^\circ \text{ y } 75^\circ$$

El 3^{er} ángulo del 2° triángulo mide:

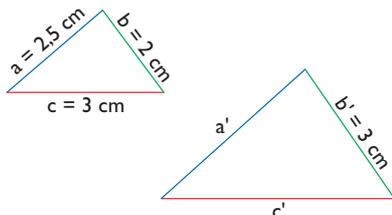
$$180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

Es decir, los ángulos del 2° triángulo miden:

$$45^\circ, 60^\circ \text{ y } 75^\circ$$

Como los dos triángulos tienen sus ángulos iguales, son semejantes.

- 4 Los dos triángulos del siguiente dibujo son semejantes. Halla cuánto miden a' y c'



Solución:

$$r = b' : b$$

$$r = 3 : 2 = 1,5$$

$$a' = 1,5 \cdot 2,5 = 3,75 \text{ cm}$$

$$c' = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ cm}$$

- 5 En una foto están Ana y su madre. Se sabe que Ana mide en la realidad 1,65 m. En la foto Ana

mide 6,6 cm, y su madre, 6,88 cm. ¿Cuánto mide su madre en la realidad?

Solución:

$$\frac{6,6}{165} = \frac{6,88}{x}$$

$$x = 172 \text{ cm} = 1,72 \text{ m}$$

- 6 Un palo vertical de 1,75 m proyecta una sombra de 2 m. Si la sombra de un edificio el mismo día, en el mismo sitio y a la misma hora mide 24 m, ¿cuánto mide de alto el edificio?

Solución:

$$\frac{2}{1,75} = \frac{24}{x}$$

$$x = 21 \text{ m}$$

- 7 La superficie de una esfera es de 15 m². Halla la superficie de otra esfera en la que el radio mide el triple.

Solución:

$$S' = 3^2 \cdot 15 = 135 \text{ m}^2$$

2. Teorema de Pitágoras

PIENSA Y CALCULA

¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) 3, 4 y 5

b) 6, 7 y 8

c) 6, 8 y 10

d) 5, 12 y 13

Solución:

a) $3^2 + 4^2 = 5^2$

b) $6^2 + 7^2 \neq 8^2$

c) $6^2 + 8^2 = 10^2$

d) $5^2 + 12^2 = 13^2$

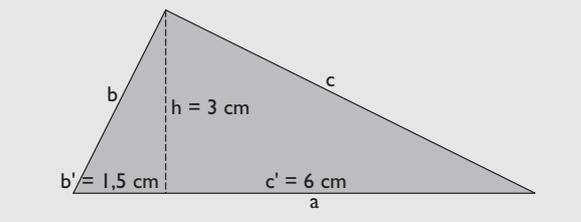
Son ternas pitagóricas a), c) y d)

- 8** En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de longitudes 1,5 cm y 6 cm. Halla la longitud de dicha altura y dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

$$h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$$

$$h = \sqrt{1,5 \cdot 6} = 3 \text{ cm}$$



- 9** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 m y la proyección del cateto **b** sobre ella mide 3,6 m. Halla:

- la longitud del cateto **b**
- la longitud de la proyección del cateto **c** sobre la hipotenusa.
- la longitud del cateto **c**
- la longitud de la altura relativa a la hipotenusa **h**
- Dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

$$a) b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$$

$$b = \sqrt{10 \cdot 3,6} = 6 \text{ m}$$

$$b) c' = a - b'$$

$$c' = 10 - 3,6 = 6,4 \text{ m}$$

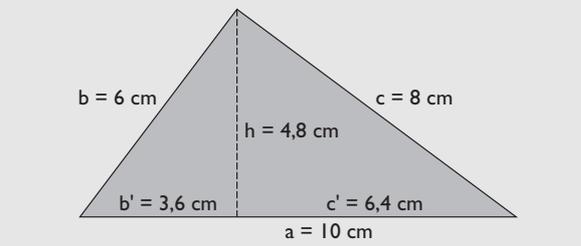
$$c) c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$$

$$c = \sqrt{10 \cdot 6,4} = 8 \text{ m}$$

$$d) h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$$

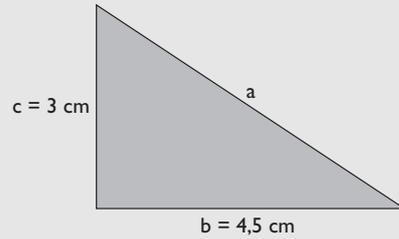
$$h = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8 \text{ m}$$

e) Dibujo



- 10** En un triángulo rectángulo los catetos miden 4,5 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

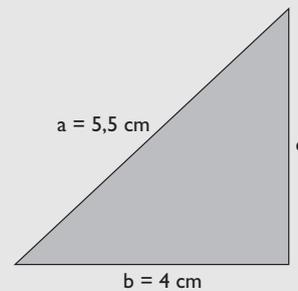


$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{4,5^2 + 3^2} = 5,41 \text{ cm}$$

- 11** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5,5 cm, y un cateto, 4 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

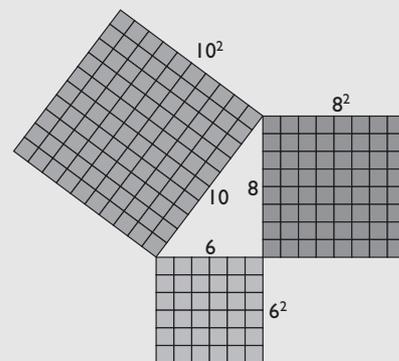


$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{5,5^2 - 4^2} = 3,77 \text{ cm}$$

- 12** Dibuja la interpretación gráfica del teorema de Pitágoras en el caso en que los lados midan 6, 8 y 10 cm

Solución:



$$6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow 36 + 64 = 100$$

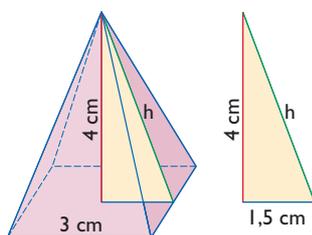
13 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

- a) 2, 3 y 4 b) 3, 4 y 5
c) 4, 5 y 6 d) 5, 12 y 13

Solución:

- a) $2^2 + 3^2 \neq 4^2 \Rightarrow$ No
b) $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow$ Sí
c) $4^2 + 5^2 \neq 6^2 \Rightarrow$ No
d) $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$ Sí

14 En una pirámide cuadrangular la arista de la base mide 3 cm, y la altura, 4 cm. Calcula el área lateral de dicha pirámide. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

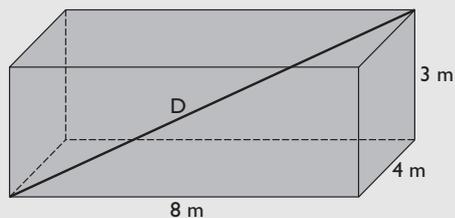
$$h^2 = 1,5^2 + 4^2$$

$$h = 4,27 \text{ cm}$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{3 \cdot 4,27}{2} = 25,62 \text{ cm}^2$$

15 Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 8 m, 4 m y 3 m

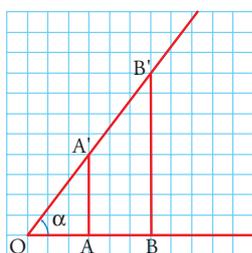
Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:
 $D^2 = 8^2 + 4^2 + 3^2$
 $D = 9,43 \text{ m}$

3. Razones trigonométricas o circulares

PIENSA Y CALCULA



Dado el ángulo α del dibujo:

- a) aplica el teorema de Pitágoras y calcula mentalmente los segmentos OA' y OB'
b) halla las razones siguientes y di si hay alguna relación entre ellas:

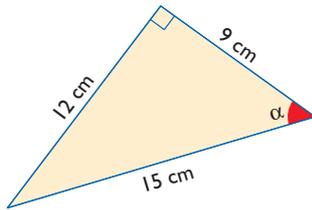
$$\frac{AA'}{OA'} \qquad \frac{BB'}{OB'}$$

Solución:

- a) $OA' = 5, OB' = 10$
b) $\frac{AA'}{OA'} = \frac{4}{5}, \frac{BB'}{OB'} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Las dos razones son iguales.

16 Halla todas las razones trigonométricas del ángulo α en el siguiente triángulo:

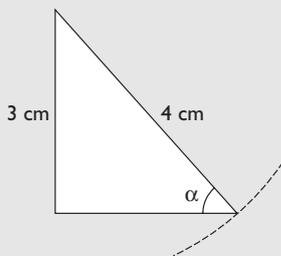


Solución:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= 12/15 = 4/5 \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = 5/4 \\ \operatorname{cos} \alpha &= 9/15 = 3/5 \Rightarrow \operatorname{sec} \alpha = 5/3 \\ \operatorname{tg} \alpha &= 12/9 = 4/3 \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = 3/4 \end{aligned}$$

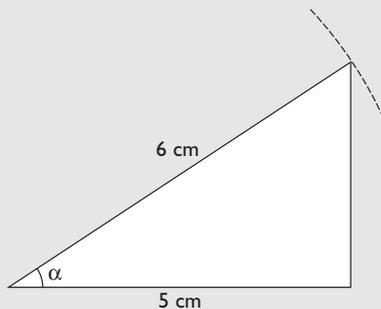
17 Dibuja un ángulo tal que $\operatorname{sen} \alpha = 3/4$

Solución:

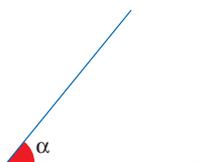


18 Dibuja un ángulo tal que $\operatorname{cos} \alpha = 5/6$

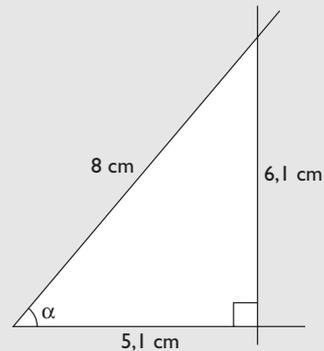
Solución:



19 Calcula de forma aproximada el valor del $\operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{cos} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ en el siguiente dibujo:



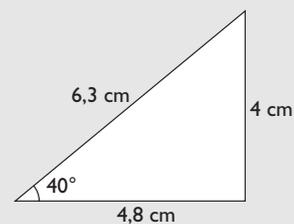
Solución:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= 6,1/8 = 0,76 \\ \operatorname{cos} \alpha &= 5,1/8 = 0,64 \\ \operatorname{tg} \alpha &= 6,1/5,1 = 1,20 \end{aligned}$$

20 Dibuja un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α de 40° y aproxima, midiendo en el dibujo, el valor del $\operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{cos} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$

Solución:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 40^\circ &= 4/6,3 = 0,63 \\ \operatorname{cos} 40^\circ &= 4,8/6,3 = 0,76 \\ \operatorname{tg} 40^\circ &= 4/4,8 = 0,83 \end{aligned}$$

21 Calcula, usando la calculadora, el valor de las siguientes razones trigonométricas. Redondea el resultado a 4 decimales.

- a) $\operatorname{sen} 32^\circ$ b) $\operatorname{cos} 68^\circ$
c) $\operatorname{tg} 85^\circ 40' 8''$ d) $\operatorname{sen} 46^\circ 35' 12''$

Solución:

- a) 0,5299
b) 0,3746
c) 13,2037
d) 0,7264

22 Calcula, usando la calculadora, la amplitud del ángulo agudo α :

- a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,5765$ b) $\operatorname{cos} \alpha = 0,3907$

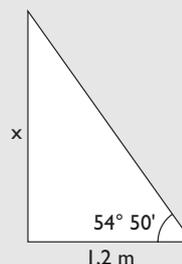
c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,8940$ d) $\cos \alpha = 0,3786$

Solución:

- a) $35^\circ 12' 17''$
- b) $67^\circ 7''$
- c) $62^\circ 10'$
- d) $67^\circ 45' 11''$

23 Elisa y su sombra forman un ángulo recto. La sombra mide 1,2 m y el ángulo con el que se ve la parte superior de su cabeza desde el extremo de la sombra mide $54^\circ 50'$. Calcula la altura de Elisa.

Solución:



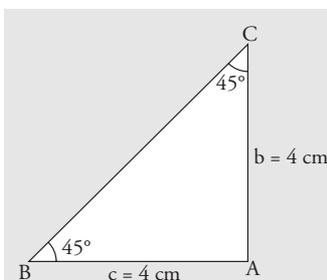
$$\operatorname{tg} 54^\circ 50' = \frac{x}{1,2} \Rightarrow x = 1,2 \operatorname{tg} 54^\circ 50' = 1,70 \text{ m}$$

4. Relaciones entre las razones trigonométricas

PIENSA Y CALCULA

Dibuja un triángulo rectángulo isósceles.

- a) ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?
- b) Calcula el valor de la tangente de uno de sus ángulos agudos.



Solución:

- a) Los ángulos miden $90^\circ : 2 = 45^\circ$
- b) $\operatorname{tg} 45^\circ = 4/4 = 1$

APLICA LA TEORÍA

24 Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 2/5$, calcula $\cos \alpha$

Solución:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

25 Sabiendo que $\operatorname{sec} \alpha = 17/8$, calcula $\operatorname{tg} \alpha$

Solución:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{sec}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \left(\frac{17}{8}\right)^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$$

26 Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 3$, calcula $\operatorname{sen} \alpha$

Solución:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$3^2 + 1 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec^2 \alpha = 10 \Rightarrow \sec \alpha = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = 3 \frac{\sqrt{10}}{10}$$

27 Calcula $\cos 40^\circ$ sabiendo que se verifica que $\operatorname{sen} 50^\circ = 0,7660$

Solución:

$$\cos 40^\circ = \operatorname{sen} 50^\circ = 0,7660$$

28 Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 1/4$, calcula las restantes razones trigonométricas de α

Solución:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = 4$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{4} : \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{15}{\sqrt{15}} = \sqrt{15}$$

29 Sabiendo que $\operatorname{sen} 20^\circ = 0,3420$ y $\cos 20^\circ = 0,9397$, calcula:

a) $\cos 70^\circ$ b) $\operatorname{sen} 70^\circ$ c) $\operatorname{tg} 20^\circ$ d) $\operatorname{tg} 70^\circ$

Solución:

$$\text{a) } \cos 70^\circ = \operatorname{sen} 20^\circ = 0,3420$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} 70^\circ = \cos 20^\circ = 0,9397$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} 20^\circ = \frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 0,3639$$

$$\text{d) } \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\operatorname{sen} 70^\circ}{\cos 70^\circ} = 2,7477$$

30 Simplifica la siguiente expresión:

$$\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Solución:

$$\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$

31 Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sec \alpha}$$

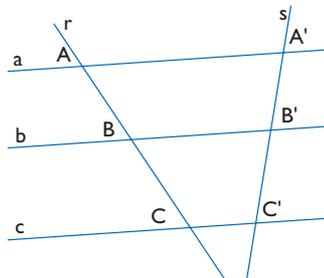
Solución:

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sec \alpha} = \frac{\sec^2 \alpha}{\sec \alpha} = \sec \alpha$$

Ejercicios y problemas

1. Teorema de Tales

- 32** Sabiendo que $AB = 7,5$ cm, $BC = 10$ cm y $B'C' = 12$ cm, halla la longitud del segmento $A'B'$. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

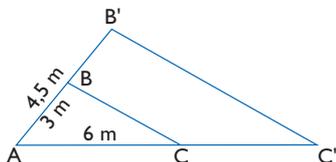
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{A'B'}{7,5} = \frac{12}{10}$$

$$A'B' = 9 \text{ cm}$$

Hemos aplicado el teorema de Tales.

- 33** Sabiendo que $AB = 3$ m, $AC = 6$ m y $AB' = 4,5$ m, halla la longitud del lado AC' . ¿Cómo están los triángulos ABC y $AB'C'$?



Solución:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

$$\frac{4,5}{3} = \frac{AC'}{6}$$

$$AC' = 9 \text{ cm}$$

Los triángulos ABC y $AB'C'$ están en posición de Tales.

- 34** Un ángulo de un triángulo mide 53° y los lados que lo forman miden $a = 6$ cm y $b = 9$ cm. En otro triángulo semejante se sabe que un ángulo mide 53° y que uno de los lados que lo forman mide $a' = 15$ cm. ¿Cuánto mide el otro lado del ángulo de 53° ?

Solución:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

$$\frac{15}{6} = \frac{x}{9}$$

$$x = 22,5 \text{ cm}$$

- 35** Un árbol de $1,6$ m proyecta una sombra de $1,2$ m. En el mismo sitio, el mismo día y a la misma hora, la sombra de una antena de telefonía móvil mide 52 m. ¿Cuánto mide de alto la antena de telefonía móvil?

Solución:

$$\frac{1,2}{1,6} = \frac{52}{x}$$

$$x = 69,33 \text{ cm}$$

- 36** El volumen de una esfera es de $7,5 \text{ cm}^3$. Halla el volumen de otra esfera en la que el radio mide el doble.

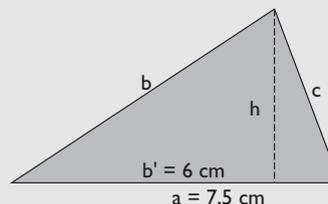
Solución:

$$V' = 2^3 \cdot 7,5 = 60 \text{ cm}^3$$

2. Teorema de Pitágoras

- 37** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide $7,5$ cm, y uno de los segmentos en que la divide la altura correspondiente mide 6 cm. Dibuja el triángulo rectángulo y halla la longitud de dicha altura.

Solución:



$$h^2 = b' \cdot c'$$

$$b' = 6 \text{ cm}$$

$$c' = a - b' = 7,5 - 6 = 1,5 \text{ cm}$$

$$h^2 = 6 \cdot 1,5 = 9$$

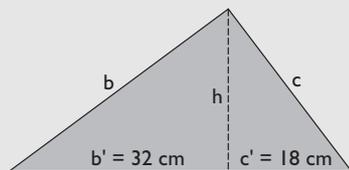
$$h = 3 \text{ cm}$$

Ejercicios y problemas

38 En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden $b' = 32$ cm y $c' = 18$ cm. Halla:

- el cateto **b**
- el cateto **c**

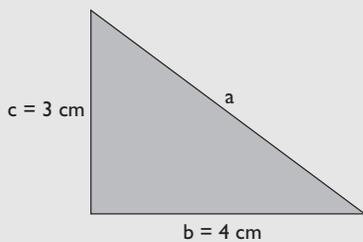
Solución:



- $b^2 = a \cdot b'$
 $a = b' + c' = 32 + 18 = 50$ cm
 $b^2 = 50 \cdot 32$
 $b = 40$ cm
- $c^2 = a \cdot c'$
 $c^2 = 50 \cdot 18$
 $c = 30$ cm

39 En un triángulo rectángulo los catetos miden 4 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa y el área del triángulo rectángulo.

Solución:



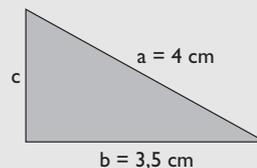
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

40 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 4 cm, y un cateto, 3,5 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{4^2 - 3,5^2} = 1,94 \text{ cm}$$

41 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

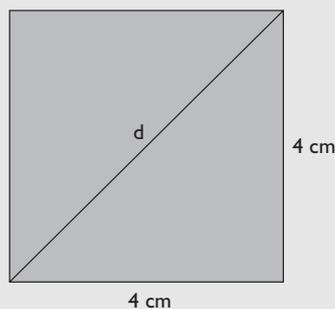
- 5, 7 y 9
- 6, 8 y 10
- 7, 9 y 11
- 10, 24 y 26

Solución:

- $5^2 + 7^2 \neq 9^2 \Rightarrow$ No
- $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow$ Sí
- $7^2 + 9^2 \neq 11^2 \Rightarrow$ No
- $10^2 + 24^2 = 26^2 \Rightarrow$ Sí

42 Dibuja un cuadrado de 4 cm de lado y su diagonal. Halla la longitud de la diagonal. Redondea el resultado a un decimal y comprueba el resultado midiendo con una regla.

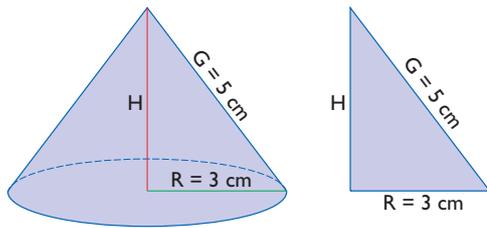
Solución:



$$d^2 = 4^2 + 4^2$$

$$d = 5,7 \text{ cm}$$

43 Del siguiente cono se sabe que el radio de la base mide 3 cm y la generatriz mide 5 cm. Calcula el volumen de dicho cono. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura H

$$R^2 + H^2 = G^2 \Rightarrow H = \sqrt{G^2 - R^2}$$

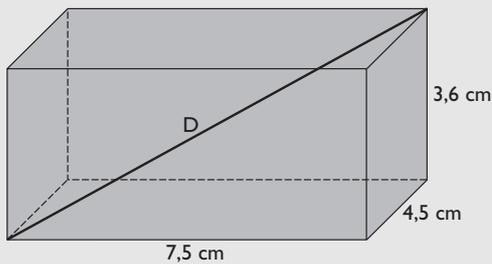
$$H = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$$

$$V = A_B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 37,70 \text{ cm}^2$$

- 44** Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 7,5 cm, 4,5 cm y 3,6 cm

Solución:



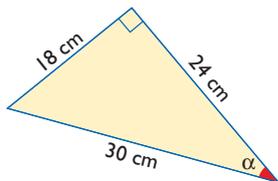
Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 7,5^2 + 4,5^2 + 3,6^2$$

$$D = 9,42 \text{ cm}$$

3. Razones trigonométricas o circulares

- 45** Halla todas las razones trigonométricas del ángulo α en el siguiente triángulo:



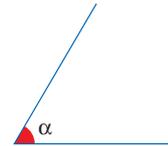
Solución:

$$\text{sen } \alpha = 18/30 = 3/5 \Rightarrow \text{cosec } \alpha = 5/3$$

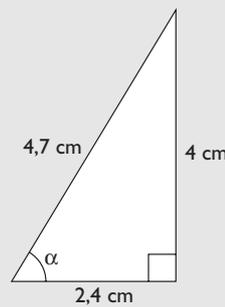
$$\cos \alpha = 24/30 = 4/5 \Rightarrow \sec \alpha = 5/4$$

$$\text{tg } \alpha = 18/24 = 3/4 \Rightarrow \text{cotg } \alpha = 4/3$$

- 46** Calcula el valor del seno, el coseno y la tangente del siguiente ángulo:



Solución:



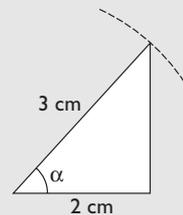
$$\text{sen } \alpha = 4/4,7 = 0,85$$

$$\cos \alpha = 2,4/4,7 = 0,51$$

$$\text{tg } \alpha = 4/2,4 = 1,67$$

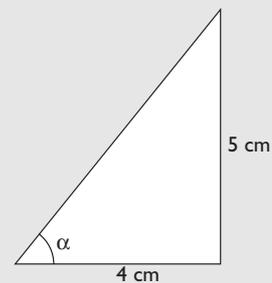
- 47** Dibuja un ángulo agudo α tal que $\cos \alpha = 2/3$

Solución:



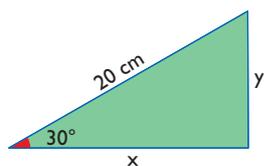
- 48** Dibuja un ángulo agudo α tal que $\text{tg } \alpha = 5/4$

Solución:



- 49** Calcula la longitud de los catetos en el siguiente triángulo rectángulo sabiendo que se verifica que $\text{sen } 30^\circ = 0,5$ y $\cos 30^\circ = 0,8660$

Ejercicios y problemas



Solución:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{y}{20}$$

$$0,5 = \frac{y}{20} \Rightarrow y = 0,5 \cdot 20 = 10 \text{ cm}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{x}{20}$$

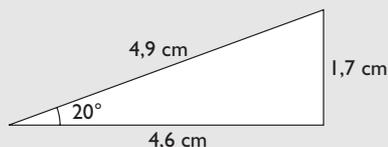
$$0,8660 = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 0,8660 \cdot 20 = 17,32 \text{ cm}$$

50 Dibuja los siguientes ángulos y aproxima midiendo en el dibujo el valor del seno, el coseno y la tangente. Aproxima el resultado a dos decimales:

- a) 20° b) 50°

Solución:

a)

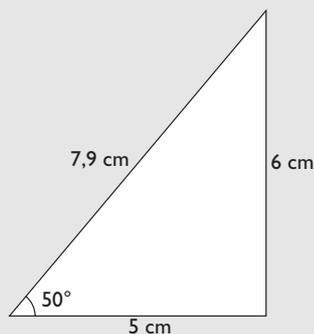


$$\text{sen } 20^\circ = 1,7/4,9 = 0,35$$

$$\text{cos } 20^\circ = 4,6/4,9 = 0,94$$

$$\text{tg } 20^\circ = 1,7/4,6 = 0,37$$

b)



$$\text{sen } 50^\circ = 6/7,9 = 0,76$$

$$\text{cos } 50^\circ = 5/7,9 = 0,63$$

$$\text{tg } 50^\circ = 6/5 = 1,2$$

51 Halla, usando la calculadora, el valor de las siguientes razones trigonométricas. Redondea los resultados a 4 decimales.

- a) $\text{sen } 42^\circ 25' 30''$ b) $\text{cos } 72^\circ 40' 10''$
 c) $\text{tg } 65^\circ 30' 18''$ d) $\text{sen } 16^\circ 23' 42''$

Solución:

a) 0,6746

b) 0,2979

c) 2,1948

d) 0,2823

52 Halla, usando la calculadora, la amplitud del ángulo agudo α :

a) $\text{sen } \alpha = 0,8530$

b) $\text{cos } \alpha = 0,4873$

c) $\text{tg } \alpha = 0,7223$

d) $\text{cos } \alpha = 0,7970$

Solución:

a) $\alpha = 58^\circ 32' 22''$

b) $\alpha = 60^\circ 50' 12''$

c) $\alpha = 35^\circ 50' 26''$

d) $\alpha = 37^\circ 9' 20''$

4. Relaciones entre las razones trigonométricas

53 Sabiendo que $\text{sen } \alpha = 5/13$, calcula $\text{cos } \alpha$

Solución:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{12}{13}$$

54 Sabiendo que $\text{cos } \alpha = 9/15$, calcula $\text{tg } \alpha$

Solución:

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \text{sec}^2 \alpha$$

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \left(\frac{15}{9}\right)^2$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$$

55 Sabiendo que $\text{tg } \alpha = 3/2$, calcula $\text{sen } \alpha$

Solución:

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \text{sec}^2 \alpha$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \text{sec}^2 \alpha$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

56 Sabiendo que $\cos 72^\circ = 0,3090$, calcula $\operatorname{sen} 18^\circ$

Solución:

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \cos 72^\circ = 0,3090$$

57 Sabiendo que $\cos \alpha = 1/5$, calcula las restantes razones trigonométricas.

Solución:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = 5$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{24}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{24}}{5} : \frac{1}{5} = \sqrt{24}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{24}}{24}$$

58 Simplifica la siguiente expresión:

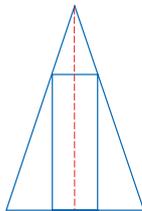
$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - 1 + \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1}{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = -1 \end{aligned}$$

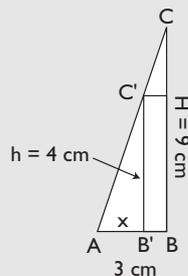
Para ampliar

59 Se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la base del triángulo es $B = 6$ cm, y la altura, $H = 9$ cm, y que la altura del rectángulo es $h = 4$ cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

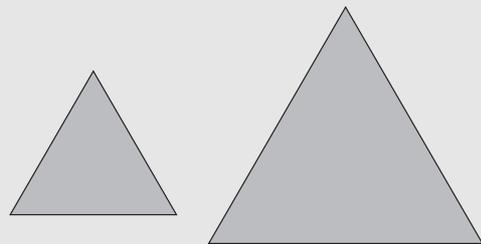
$$\frac{x}{3} = \frac{4}{9}$$

$$x = 1,33 \text{ cm}$$

$$\text{Base del rectángulo: } 2(3 - 1,33) = 3,34 \text{ cm}$$

60 Dibuja dos triángulos equiláteros distintos. Razona si son semejantes.

Solución:



Sí son semejantes, porque los ángulos de uno son iguales a los ángulos del otro.

Ejercicios y problemas

- 61** Los lados de un triángulo miden $a = 5$ cm, $b = 7,5$ cm y $c = 9$ cm. Halla la medida de los lados a' , b' y c' de un triángulo semejante en el que $r = 1,5$

Solución:

$$\begin{aligned} a' &= 1,5 \cdot a \\ a' &= 1,5 \cdot 5 = 7,5 \text{ cm} \\ b' &= 1,5 \cdot b \\ b' &= 1,5 \cdot 7,5 = 11,25 \text{ cm} \\ c' &= 1,5 \cdot c \\ c' &= 1,5 \cdot 9 = 13,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

- 62** Un palo de un metro de longitud colocado verticalmente proyecta una sombra de un metro. Si el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de la pirámide Kefrén mide 136 m, calcula mentalmente lo que mide de alto la pirámide de Kefrén.

Solución:

La pirámide de Kefrén mide lo mismo que la sombra, es decir, 136 m

- 63** El radio de una circunferencia mide x metros, y el radio de otra circunferencia es el triple. Calcula cuántas veces es mayor la longitud de la segunda circunferencia y el área del círculo correspondiente.

Solución:

Longitud:

$$\frac{L'}{L} = 3$$

$$L' = 3L$$

La longitud es el triple.

Área:

$$\frac{A'}{A} = 3^2$$

$$A' = 9A$$

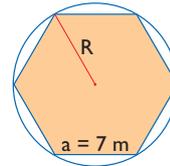
El área es nueve veces mayor.

- 64** Clasifica los siguientes triángulos en acutángulos, rectángulos y obtusángulos:
- $a = 1$ cm, $b = 1,5$ cm, $c = 2$ cm
 - $a = 1,5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2,5$ cm
 - $a = 2$ cm, $b = 2,5$ cm, $c = 3$ cm
 - $a = 2,5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 6,5$ cm

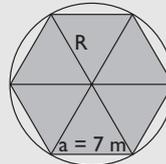
Solución:

- $1^2 + 1,5^2 = 3,25 < 2^2 = 4 \Rightarrow$ Obtusángulo.
- $1,5^2 + 2^2 = 6,25 = 2,5^2 \Rightarrow$ Rectángulo.
- $2^2 + 2,5^2 = 10,25 > 3^2 = 9 \Rightarrow$ Acutángulo.
- $2,5^2 + 6^2 = 36,25 > 6,5^2 = 42,25 \Rightarrow$ Rectángulo.

- 65** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente hexágono:



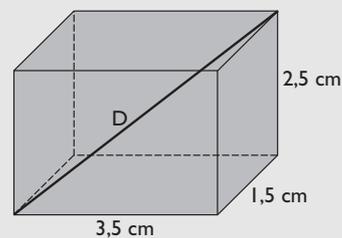
Solución:



En el hexágono coincide la longitud del lado y del radio de la circunferencia circunscrita; por tanto, $R = 7$ m

- 66** Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 3,5 cm, 1,5 cm y 2,5 cm

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 3,5^2 + 1,5^2 + 2,5^2$$

$$D = 4,56 \text{ cm}$$

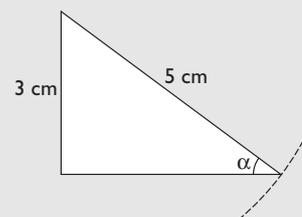
- 67** Dibuja un ángulo agudo α que cumpla:

a) $\sin \alpha = 3/5$

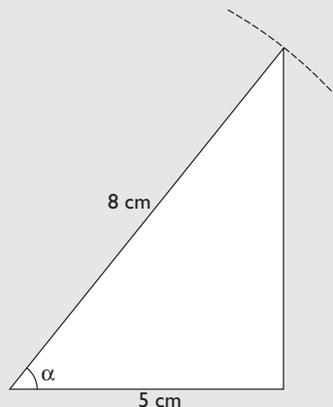
b) $\cos \alpha = 5/8$

Solución:

- a)



b)

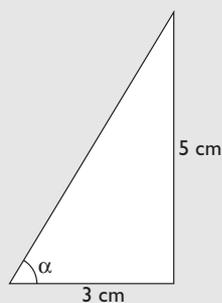


68 Dibuja un ángulo agudo α que cumpla:

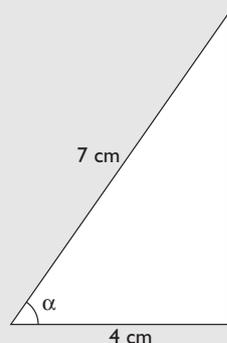
- a) $\operatorname{tg} \alpha = 5/3$
 b) $\operatorname{sec} \alpha = 7/4$

Solución:

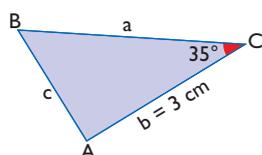
a)



b)



69 Calcula a , c y B en el siguiente triángulo rectángulo, sabiendo que $\operatorname{tg} 35^\circ = 0,7002$ y $\operatorname{sen} 35^\circ = 0,5736$. Aproxima el resultado a dos decimales.



Solución:

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{c}{3} = 0,7002$$

$$c = 3 \cdot 0,7002 = 2,10 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} 35^\circ = \frac{c}{a} = 0,5736$$

$$a = \frac{2,10}{0,5736} = 3,66 \text{ cm}$$

$$B = 55^\circ$$

70 Halla $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 3/5$

Solución:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$$

71 Calcula $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ sabiendo que se verifica que $\cos \alpha = 2/5$

Solución:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

72 Si $\operatorname{tg} \alpha = 4$, calcula las restantes razones trigonométricas.

Solución:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$4^2 + 1 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec^2 \alpha = 17$$

$$\sec \alpha = \sqrt{17} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Ejercicios y problemas

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = 4 \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{4\sqrt{17}}{17} \\ \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{\sqrt{17}}{4}\end{aligned}$$

73 Simplifica la siguiente expresión:

$$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Solución:

$$\begin{aligned}\cos^3 \alpha + \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) &= \\ = \cancel{\cos^3 \alpha} + \cos \alpha - \cancel{\cos^3 \alpha} &= \\ = \cos \alpha\end{aligned}$$

Con calculadora

74 Calcula redondeando a cuatro decimales:

- a) $\cos 17^\circ 30' 20''$
- b) $\operatorname{tg} 20^\circ 30' 40''$
- c) $\operatorname{sen} 39^\circ 40'$

Solución:

- a) 0,9537
- b) 0,3741
- c) 0,6383

75 Calcula redondeando a cuatro decimales:

- a) $\operatorname{sen} 21^\circ 50'$
- b) $\cos 32^\circ 30''$
- c) $\operatorname{tg} 15^\circ 20' 30''$

Solución:

- a) 0,3719
- b) 0,8434
- c) 0,2744

76 Calcula redondeando a cuatro decimales:

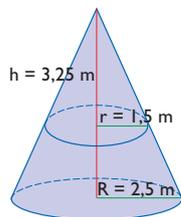
- a) $\operatorname{sec} 50^\circ$
- b) $\operatorname{cotg} 15^\circ 40'$
- c) $\operatorname{cosec} 43^\circ 12''$

Solución:

- a) 1,5557
- b) 3,5656
- c) 1,4608

Problemas

77 Dado el siguiente dibujo, calcula la medida de la altura H del cono grande.



Solución:

$$\begin{aligned}\frac{R}{r} = \frac{H}{h} &\Rightarrow \frac{2,5}{1,5} = \frac{H}{3,25} \\ H &= 5,42 \text{ m}\end{aligned}$$

78 Los lados de un triángulo miden $a = 2$ cm, $b = 2,5$ cm y $c = 3,5$ cm. Sabiendo que en otro triángulo semejante $a' = 5$ cm, halla la medida de los lados b' y c'

Solución:

Razón de semejanza:

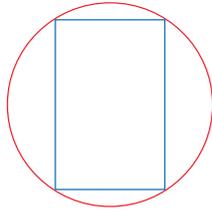
$$r = \frac{a'}{a}$$

$$r = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$b' = 2,5 \cdot 2,5 = 6,25 \text{ cm}$$

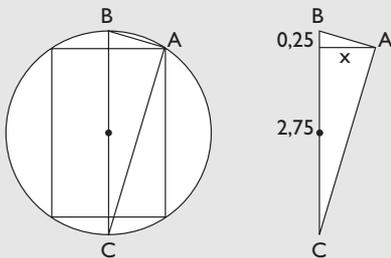
$$c' = 2,5 \cdot 3,5 = 8,75 \text{ cm}$$

- 79** Se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el radio de la circunferencia es $R = 1,5$ cm y que la altura del rectángulo es $h = 2,5$ cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



El triángulo dibujado es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

Aplicando el teorema de la altura:

$$x^2 = 2,75 \cdot 0,25$$

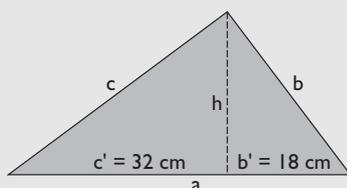
$$x = 0,83 \text{ cm}$$

$$\text{Base del rectángulo: } 2x = 2 \cdot 0,83 = 1,66 \text{ cm}$$

- 80** En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden $b' = 18$ cm y $c' = 32$ cm. Halla:

- la longitud de la hipotenusa **a**
- la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.
- el cateto **b**
- el cateto **c**
- el área de dicho triángulo rectángulo.

Solución:



Solución:

a) $a = b' + c'$

$$a = 18 + 32 = 50 \text{ cm}$$

b) $h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$

$$h = \sqrt{18 \cdot 32} = 24 \text{ cm}$$

c) $b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$

$$b = \sqrt{50 \cdot 18} = 30 \text{ cm}$$

d) $c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$

$$c = \sqrt{50 \cdot 32} = 40 \text{ cm}$$

e) Área = $b \cdot c$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = 600 \text{ cm}^2$$

- 81** Un rectángulo mide 400 m de perímetro y 2 500 m² de área. Halla el área de otro rectángulo semejante que mide 1 000 m de perímetro.

Solución:

$$r = \frac{P'}{P}$$

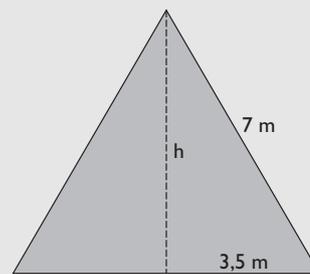
$$r = \frac{1\,000}{400} = 2,5$$

$$A' = r^2 \cdot A$$

$$A' = 2,5^2 \cdot 2\,500 = 15\,625 \text{ m}^2$$

- 82** Halla la altura de un triángulo equilátero de 7 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

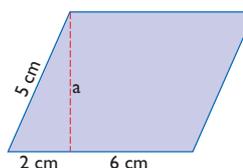
Solución:



$$h^2 + 3,5^2 = 7^2$$

$$h = 6,06 \text{ m}$$

- 83** Halla el área del siguiente romboide:



Ejercicios y problemas

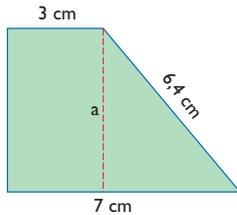
Solución:

$$a^2 + 2^2 = 5^2$$

$$a = 4,58 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } 8 \cdot 4,58 = 36,64 \text{ cm}^2$$

84 Halla el área del siguiente trapecio rectángulo:



Solución:

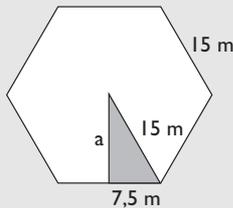
$$a^2 + 4^2 = 6,4^2$$

$$a = 5,00 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{7 + 3}{2} \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$$

85 Halla el área de un hexágono regular de 15 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

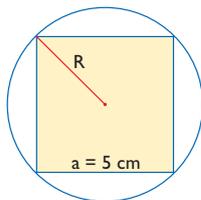


$$a^2 + 7,5^2 = 15^2$$

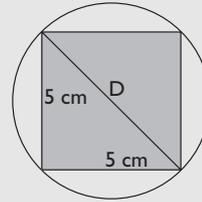
$$a = 12,99 = 13,00 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 15}{2} \cdot 13 = 585 \text{ cm}^2$$

86 Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente cuadrado:



Solución:



$$D^2 = 5^2 + 5^2$$

$$D = 7,07 \text{ cm}$$

$$R = D/2 = 3,54 \text{ cm}$$

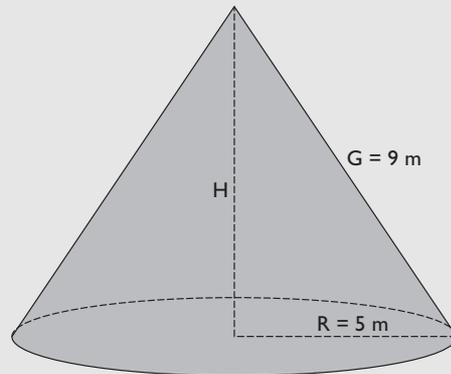
87 Una antena de radio proyecta una sombra de 57 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, Sonia, que mide 1,75 m, proyecta una sombra de 2,20 m. Calcula la altura de la antena de radio.

Solución:

$$\frac{2,20}{1,75} = \frac{57}{x} \Rightarrow x = 45,34 \text{ m}$$

88 Halla el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 5 m y la generatriz mide 9 m. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$H^2 + 5^2 = 9^2$$

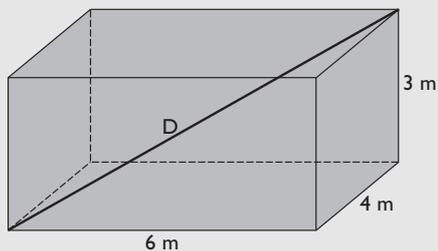
$$H = 7,48 \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 7,48 = 195,83 \text{ m}^3$$

89 Calcula la diagonal de una habitación cuyas dimensiones son 6 m × 4 m × 3 m

Solución:

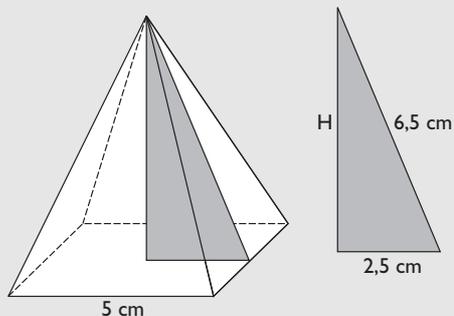


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 6^2 + 4^2 + 3^2 \Rightarrow D = 7,81 \text{ m}$$

- 90** Dibuja una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mide 5 cm y la apotema mide 6,5 cm. Calcula su volumen.

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$H^2 + 2,5^2 = 6,5^2$$

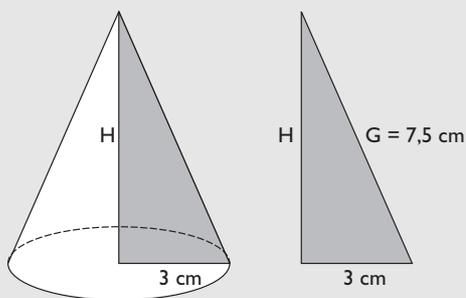
$$H = 6 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 6 = 50 \text{ cm}^3$$

- 91** Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mide 3 cm y la generatriz mide 7,5 cm. Halla su altura.

Solución:



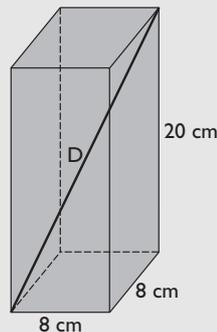
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$H^2 + 3^2 = 7,5^2$$

$$H = 6,87 \text{ cm}$$

- 92** Calcula la diagonal de un prisma recto cuadrangular cuya base tiene 8 cm de arista y 20 cm de altura.

Solución:

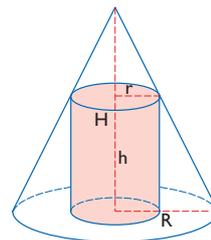


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 8^2 + 8^2 + 20^2$$

$$D = 22,98 \text{ cm}$$

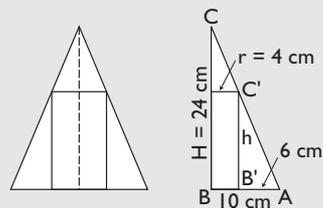
- 93** Se tiene un cilindro inscrito en un cono, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la altura del cono es $H = 24 \text{ cm}$, el radio del cono es $R = 10 \text{ cm}$, y que el radio del cilindro mide $r = 4 \text{ cm}$, halla cuánto mide la altura h del cilindro.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles.

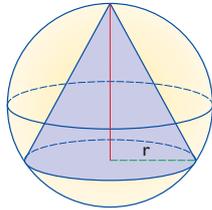


Los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{h}{24} \Rightarrow x = 14,4 \text{ cm}$$

Ejercicios y problemas

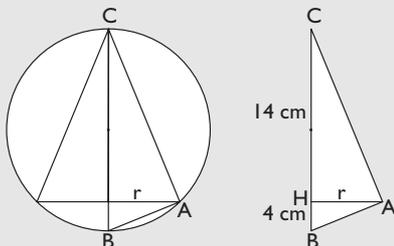
- 94** Se tiene un cono inscrito en una esfera, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el radio de la esfera es $R = 9$ cm y que la altura del cono es $h = 14$ cm, halla cuánto mide el radio de la base del cono.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia.



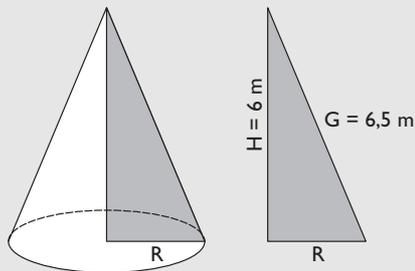
El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

Aplicando el teorema de la altura:

$$r^2 = 14 \cdot 4 = 56 \Rightarrow r = 7,48 \text{ cm}$$

- 95** Halla el radio de la base de un cono recto en el que la altura mide 6 m, y la generatriz, 6,5 m

Solución:

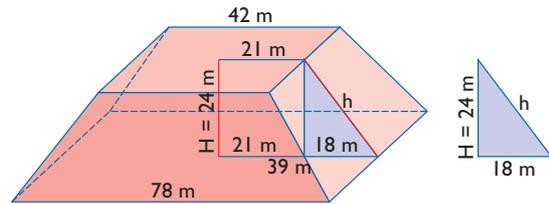


Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$R^2 + 6^2 = 6,5^2$$

$$R = 2,5 \text{ m}$$

- 96** Calcula el área del siguiente tronco de pirámide:



Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 18^2 + 24^2$$

$$h = 30 \text{ m}$$

$$A_{B_1} = 78^2 = 6084 \text{ m}^2$$

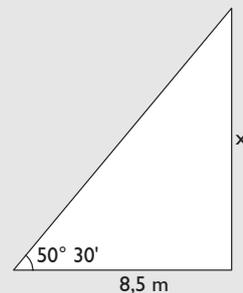
$$A_{B_2} = 42^2 = 1764 \text{ m}^2$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{78 + 42}{2} \cdot 30 = 7200 \text{ m}^2$$

$$A_T = 6084 + 1764 + 7200 = 15048 \text{ m}^2$$

- 97** Un árbol forma con su sombra un ángulo recto. Si la sombra mide 8,5 m, y el ángulo con el que se ve la parte superior del árbol, desde el extremo de la sombra, mide $50^\circ 30'$, calcula la altura del árbol.

Solución:

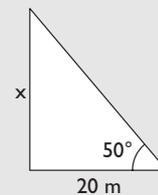


$$\text{tg } 50^\circ 30' = \frac{x}{8,5}$$

$$x = 8,5 \text{ tg } 50^\circ 30' = 10,31 \text{ m}$$

- 98** Desde un punto en el suelo situado a 20 m del pie de la fachada de un edificio se ve el tejado del mismo con un ángulo de 50° . Calcula la altura del edificio.

Solución:

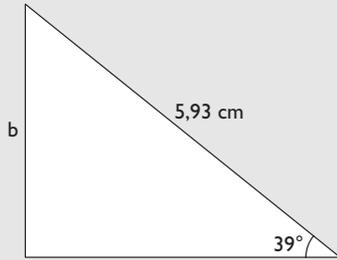


$$\text{tg } 50^\circ = \frac{x}{20}$$

$$x = 20 \text{ tg } 50^\circ = 23,84 \text{ m}$$

- 99** Calcula en un triángulo rectángulo el lado **b**, siendo $a = 5,93$ cm y $B = 39^\circ$

Solución:

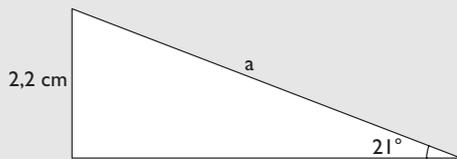


$$\text{sen } 39^\circ = \frac{b}{5,93}$$

$$b = 5,93 \text{ sen } 39^\circ = 3,73 \text{ cm}$$

- 100** Calcula en un triángulo rectángulo el lado **a**, siendo $b = 2,2$ cm y $B = 21^\circ$

Solución:

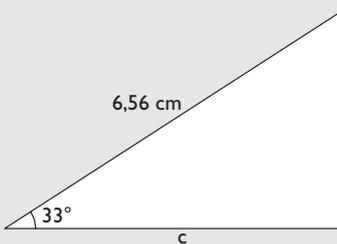


$$\text{sen } 21^\circ = \frac{2,2}{a}$$

$$a = \frac{2,2}{\text{sen } 21^\circ} = 6,14 \text{ cm}$$

- 101** Calcula en un triángulo rectángulo el lado **c**, siendo $a = 6,56$ cm y $B = 33^\circ$

Solución:

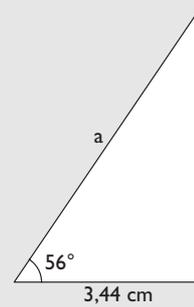


$$\text{cos } 33^\circ = \frac{c}{6,56}$$

$$c = 6,56 \text{ cos } 33^\circ = 5,50 \text{ cm}$$

- 102** Calcula en un triángulo rectángulo el lado **a**, siendo $c = 3,44$ cm y $B = 56^\circ$

Solución:

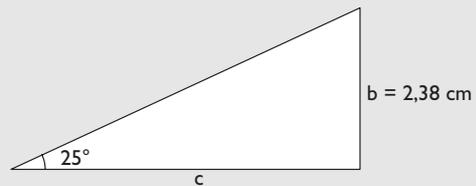


$$\text{cos } 56^\circ = \frac{3,44}{a}$$

$$a = \frac{3,44}{\text{cos } 56^\circ} = 6,15 \text{ cm}$$

- 103** Calcula en un triángulo rectángulo el lado **c**, siendo $b = 2,38$ cm y $B = 25^\circ$

Solución:

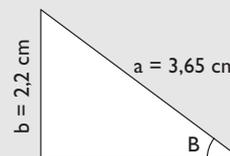


$$\text{tg } 25^\circ = \frac{2,38}{c}$$

$$c = \frac{2,38}{\text{tg } 25^\circ} = 5,10 \text{ cm}$$

- 104** Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo **B**, siendo $a = 3,65$ cm y $b = 2,2$ cm

Solución:



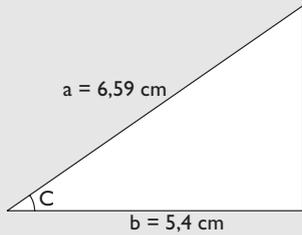
$$\text{sen } B = \frac{2,2}{3,65}$$

$$B = 37^\circ 3' 59''$$

- 105** Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo **C**, siendo $a = 6,59$ cm y $b = 5,4$ cm

Ejercicios y problemas

Solución:

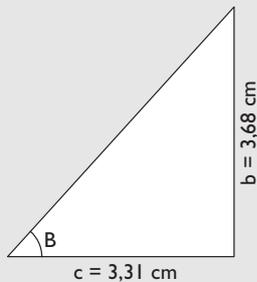


$$\cos C = \frac{5,4}{6,59}$$

$$C = 34^\circ 58' 22''$$

- 106** Calcula en un triángulo rectángulo el ángulo **B**, siendo $b = 3,68$ cm y $c = 3,31$ cm

Solución:

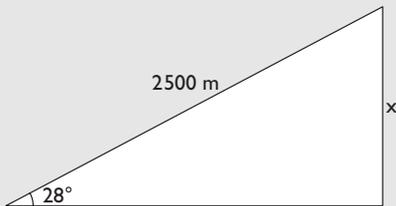


$$\operatorname{tg} B = \frac{3,68}{3,31}$$

$$B = 48^\circ 1' 48''$$

- 107** Desde un barco se mide con un radar la distancia a la cima de una montaña, que es de 2 500 m. El ángulo de elevación con el que se ve la cima desde el barco es de 28° . Calcula la altura de la montaña.

Solución:



$$\operatorname{sen} 28^\circ = \frac{x}{2500}$$

$$x = 2500 \operatorname{sen} 28^\circ = 1173,68 \text{ m}$$

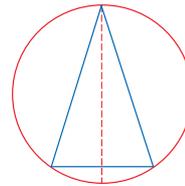
- 108** Simplifica la siguiente expresión: $\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}$

Solución:

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha} = 1 + \cos \alpha$$

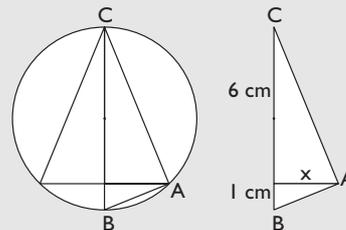
Para profundizar

- 109** Se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el diámetro de la circunferencia es $D = 7$ cm y que la altura del triángulo es $h = 6$ cm, halla cuánto mide la base del triángulo isósceles.

Solución:



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

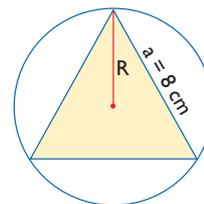
Aplicando el teorema de la altura:

$$x^2 = 6 \cdot 1$$

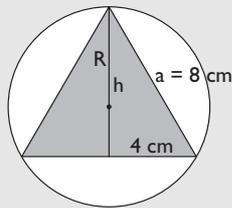
$$x = 2,45 \text{ cm}$$

$$\text{Base del triángulo: } 2x = 2 \cdot 2,45 = 4,90 \text{ cm}$$

- 110** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente triángulo equilátero.



Solución:



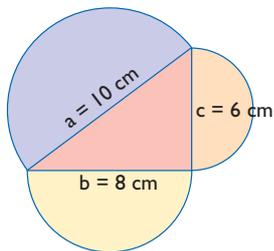
$$h^2 + 4^2 = 8^2$$

$$h = 6,93 \text{ cm}$$

El radio es los $\frac{2}{3}$ de la altura por una propiedad de las medianas de un triángulo.

$$R = \frac{2}{3} \cdot 6,93 = 4,62 \text{ cm}$$

- 111** Se tiene un triángulo rectángulo cuyos lados miden $a = 10 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$ y $c = 6 \text{ cm}$. En la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, cambia el cuadrado por un semicírculo. Calcula el área de los tres semicírculos y comprueba si se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.



Solución:

Área del semicírculo de radio $a = 10 \text{ cm}$

$$A_1 = \pi \cdot 10^2/2 = 157,08 \text{ cm}^2$$

Área del semicírculo de radio $b = 8 \text{ cm}$

$$A_2 = \pi \cdot 8^2/2 = 100,53 \text{ cm}^2$$

Área del semicírculo de radio $c = 6 \text{ cm}$

$$A_3 = \pi \cdot 6^2/2 = 56,55 \text{ cm}^2$$

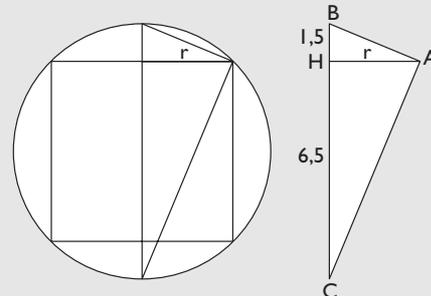
$$A_2 + A_3 = 100,53 + 56,55 = 157,08 \text{ cm}^2$$

Vemos que se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

- 112** Se tiene un cilindro inscrito en una esfera. Sabiendo que el radio de la esfera es $R = 4 \text{ cm}$ y la altura del cilindro es $h = 5 \text{ cm}$, halla cuánto mide el radio de la base del cilindro.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia.



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

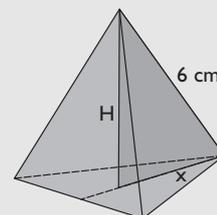
Aplicando el teorema de la altura:

$$r^2 = 6,5 \cdot 1,5 = 9,75$$

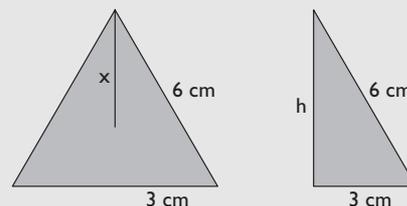
$$r = 3,12 \text{ cm}$$

- 113** Calcula la altura de un tetraedro de arista 6 cm

Solución:



En primer lugar tenemos que hallar la altura del triángulo equilátero de la base, para poder hallar posteriormente x



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 3^2 = 6^2$$

$$h = 5,20 \text{ cm}$$

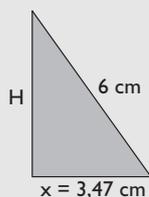
Por la propiedad de las medianas de un triángulo, éstas se cortan en un punto que está a $\frac{2}{3}$ del vértice. Se tiene:

Ejercicios y problemas

$$x = \frac{2}{3} \cdot h$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot 5,20 = 3,47 \text{ cm}$$

Se obtiene otro triángulo rectángulo formado por x , H y una arista:



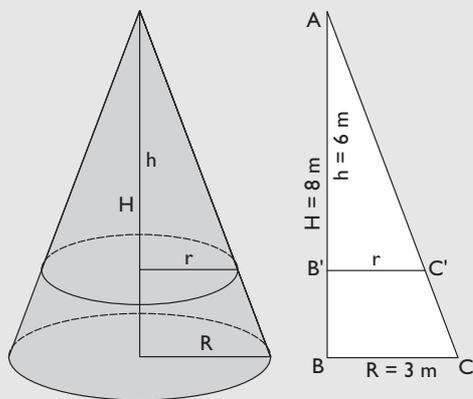
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$H^2 + 3,47^2 = 6^2$$

$$H = 4,89 \text{ cm}$$

- 114** El radio de la base de un cono mide 3 cm y la altura mide 8 m. Se corta por un plano paralelo a la base a 2 m de la misma. ¿Qué radio tendrá la circunferencia que hemos obtenido en el corte?

Solución:



Los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes porque tienen los ángulos iguales; por tanto, los lados son proporcionales:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{r}{3}$$

$$r = 2,25 \text{ m}$$

- 115** ¿Existe algún ángulo α tal que $\sin \alpha = 4/5$ y $\cos \alpha = 3/4$?

Solución:

Para que sea posible se debe cumplir la propiedad fundamental

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{481}{400} \neq 1$$

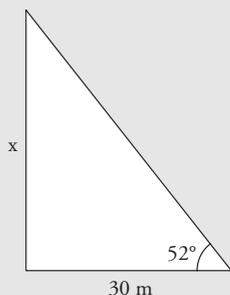
No se cumple.

Aplica tus competencias

Cálculo de alturas

- 116** Desde un punto en el suelo situado a 30 metros del pie de una torre se traza la visual a la cúspide de la torre con un ángulo de 52° . ¿Cuál es la altura de la torre?

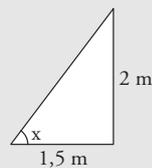
Solución:



$$\operatorname{tg} 52^\circ = \frac{x}{30}$$

$$x = 30 \operatorname{tg} 52^\circ = 38,40 \text{ m}$$

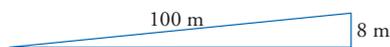
Solución:



$$\operatorname{tg} x = \frac{2}{1,5} = 1,33$$

$$x = 53^\circ 3' 40''$$

- 118** Un tramo de carretera salva en 100 m, medidos sobre la carretera, un desnivel de 8 m. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la carretera?



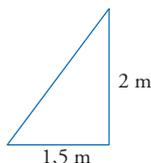
Solución:

$$\operatorname{sen} x = 8/100 = 0,08$$

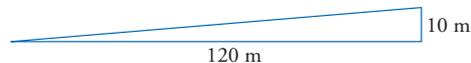
$$x = 4^\circ 35' 19''$$

Cálculo de inclinaciones

- 117** ¿Cuál es la inclinación de los rayos del sol si un mástil de 2 m proyecta una sombra sobre el suelo de 1,5 m?



- 119** Una carretera sube 10 m en 120 m medidos en horizontal. ¿Cuál es el ángulo de inclinación?



Solución:

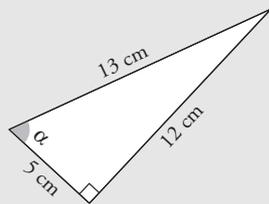
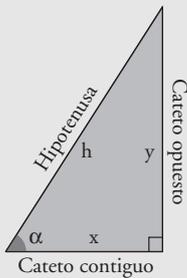
$$\operatorname{tg} x = 10/120 = 0,08$$

$$x = 4^\circ 34' 26''$$

Comprueba lo que sabes

1 Define las razones $\text{sen } \alpha$, $\text{cos } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$ en un triángulo rectángulo y pon un ejemplo.

Solución:



a) El **seno del ángulo** α es la razón entre el cateto opuesto al ángulo α y la hipotenusa.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \text{sen } \alpha = \frac{y}{h}$$

b) El **coseno del ángulo** α es la razón entre el cateto contiguo al ángulo α y la hipotenusa.

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}, \text{cos } \alpha = \frac{x}{h}$$

c) La **tangente del ángulo** α es la razón entre el cateto opuesto y el cateto contiguo.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}, \text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$$

Ejemplo

Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α en el triángulo rectángulo de la figura del margen.

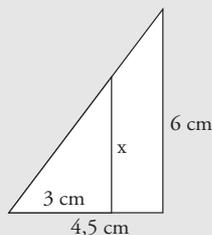
$$\text{sen } \alpha = 12/13$$

$$\text{cos } \alpha = 5/13$$

$$\text{tg } \alpha = 12/5$$

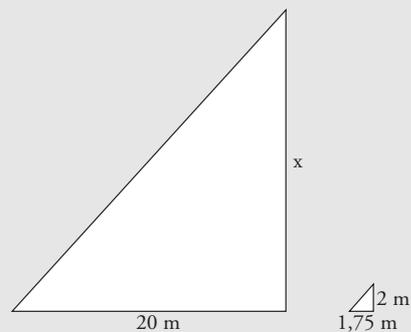
2 Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4,5 cm y 6 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo menor en posición de Thales tal que su cateto menor mida 3 cm. Calcula la longitud del otro cateto.

Solución:



$$\frac{6}{x} = \frac{4,5}{3} \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

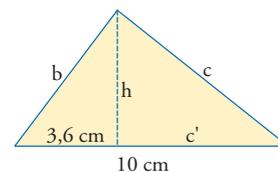
Solución:



$$\frac{20}{x} = \frac{1,75}{2} \Rightarrow x = 22,86 \text{ cm}$$

3 Un edificio proyecta una sombra de 20 m. El mismo día, y a la misma hora, un palo de 2 m proyecta una sombra de 1,75 m en el mismo lugar. Calcula la altura del edificio.

4 Calcula b , c , c' y h en el triángulo de la figura:



Solución:

$$b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$$

$$b = \sqrt{10 \cdot 3,6} = 6 \text{ cm}$$

$$c' = a - b'$$

$$c' = 10 - 3,6 = 6,4 \text{ cm}$$

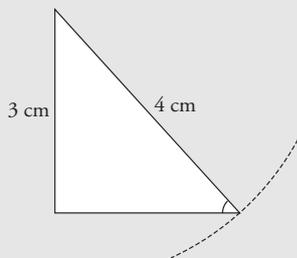
$$c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$$

$$c = \sqrt{10 \cdot 6,4} = 8 \text{ cm}$$

$$h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$$

$$h = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8 \text{ cm}$$

- 5** Dibuja un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo tal que cumpla que $\text{sen } \alpha = 3/4$. ¿Cuántos triángulos puedes dibujar con esa condición?

Solución:

Se pueden dibujar infinitos triángulos, ya que el seno depende del ángulo y no depende del tamaño del triángulo.

- 6** Sabiendo que $\text{cos } \alpha = 0,4$, calcula $\text{sen } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$

Solución:

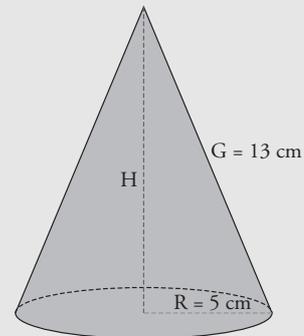
$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{sen}^2 \alpha + 0,4^2 = 1$$

$$\text{sen } \alpha = 0,92$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{0,92}{0,4} = 2,3$$

- 7** Calcula el volumen de un cono en el que el radio de la base mide 5 cm y la generatriz mide 13 cm

Solución:

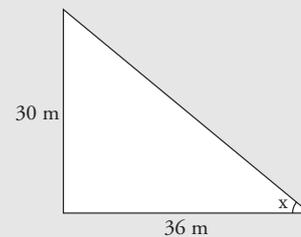
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$5^2 + H^2 = 13^2$$

$$H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 314,16 \text{ cm}^3$$

- 8** ¿Con qué ángulo de inclinación se verá el tejado de un edificio, que tiene 30 m de altura, desde una distancia de 36 m de la fachada?

Solución:

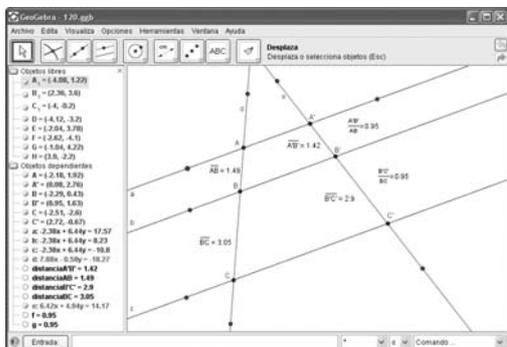
$$\text{tg } x = \frac{30}{36} = 0,8333$$

$$x = 39^\circ 48' 16''$$



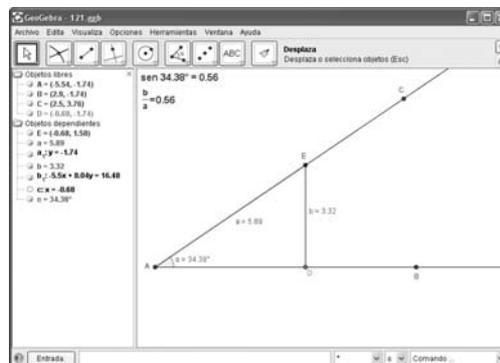
Paso a paso

120 Comprueba el teorema de Tales.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.



Solución:

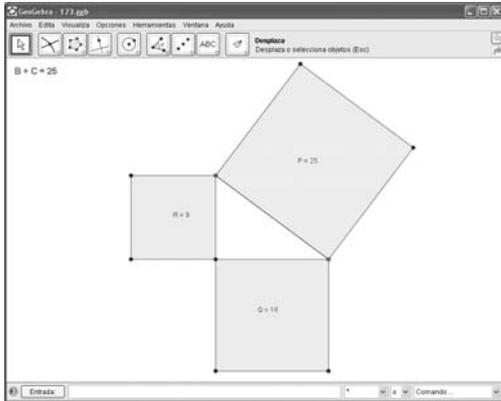
Resuelto en el libro del alumnado.

121 Dibuja un ángulo, mide su amplitud y calcula e interpreta el valor del seno.

122 Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige Matemáticas, curso y tema.

Practica

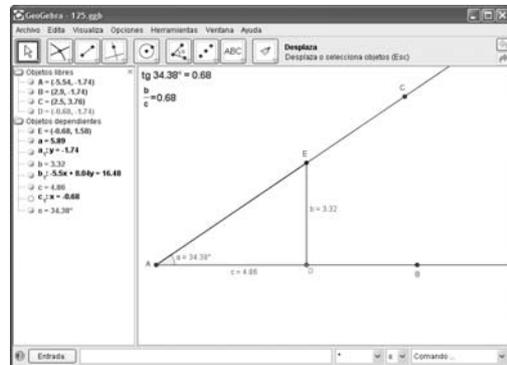
123 Comprueba el teorema de Pitágoras.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

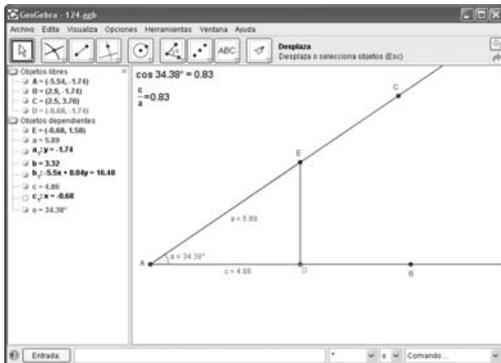
125 Dibuja un ángulo, mide su amplitud y calcula e interpreta el valor de la tangente.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

124 Dibuja un ángulo, mide su amplitud y calcula e interpreta el valor del coseno.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.