ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

4.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

La palabra ***ecuación*** viene del latín, de *aequatus*, participio pasivo de *aequare*: "igualar, volver igual". Una ecuación es una afirmación de igualdad entre dos expresiones matemáticas. Resolver la ecuación significa encontrar la o las condiciones requeridas o necesarias para que se cumpla la igualdad propuesta.

Así, cuando se establece que $3x^2 + 5x$ es igual a cero, en ese momento se ha creado una ecuación, pues hay una afirmación de igualdad entre dos expresiones, o sea $3x^2 + 5x = 0$. Otra cosa distinta es investigar qué se requiere para que realmente $3x^2 + 5x$ sea igual a cero; cuando se hace esa investigación se llega a que se requiere que la equis sea $x = 0$, o bien $x = -\dfrac{5}{3}$. Eso es resolver la ecuación anterior.

Una ecuación es una especie de *"adivinanza numérica"*, o sea que se hace un planteamiento cuya respuesta debe ser un número. Por ejemplo: *"¿Qué número elevado al cuadrado es igual al doble de ese número más veinticuatro?"*. Es una adivinanza cuya respuesta es el número **6**. La diferencia entre cualquier adivinanza con las *"adivinanzas numéricas"*, llamadas ecuaciones, es que para responder las primeras "hay que atinarle a la respuesta", mientras que en las numéricas, existen procedimientos que conducen certera e infaliblemente a la solución.

Así, en el caso anterior, se puede plantear que

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x + 24 \\ x^2 - 2x - 24 &= 0 \\ (x - 6)(x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$x_1 = 6 \quad ; \quad x_2 = -4$$

Entonces, una ecuación trigonométrica también va a ser una especie de *"adivinanza numérica"*, solamente que relacionada con una función trigonométrica. Por ejemplo: *"El seno de un ángulo más el coseno de ese mismo ángulo es igual a* 1.328926*. ¿Cuál es ese ángulo?"*. El alumno puede comprobar con su calculadora que la respuesta es **25º**; pero evidentemente que esa respuesta no es posible encontrarla al tanteo. Debe existir un procedimiento matemático que lleve a la solución, el cual es el planteamiento de una ecuación trigonométrica:

$$sen\, x + cos\, x = 1.328926$$

Resolver ecuaciones como la anterior es el objetivo de este capítulo. Para su estudio conviene clasificar las ecuaciones trigonométricas y mencionar el método de solución que les corresponda.

4.2 DESPEJE DIRECTO

Las ecuaciones trigonométricas más sencillas son las que se resuelven simplemente despejando la función trigonométrica y luego aplicando la función inversa para despejar el argumento. El argumento es el ángulo, que no necesariamente es x. Recordar que todas las funciones trigonométricas inversas tienen dos soluciones, según lo visto en las páginas 32 a 38 del capítulo 2.

Ejemplo 1: $cos\, 2x = 0.642787609$

solución: En este caso, la función trigonométrica ya está despejada. El ángulo, o sea el argumento es $2x$. Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$cos\, 2x = 0.642787609$$
$$2x = arc\, cos\, 0.642787609$$

tiene dos soluciones que son (ver capítulo 2):

Primer cuadrante:	Segundo cuadrante:
$2x_1 = 50$	$2x_2 = 360 - 50$
$x_1 = \dfrac{50}{2}$	$2x_2 = 310$
$x_1 = 25$	$x_2 = \dfrac{310}{2}$
	$x_2 = 155$

¡Cuidado!: Al afirmar que existen dos soluciones en la ecuación trigonométrica, se refiere a que el *arco coseno de* 0.642787609 es 50 grados y también 310 grados los cuales son iguales al argumento $2x$. No debe confundirse entonces entre que esos valores sean iguales a x a que sean iguales al argumento, en este caso a $2x$. La realidad es que esos valores deben ser iguales siempre al argumento.

Ejemplo 2: $5 + \tan 6x = 3.267949192$

solución: El ángulo, o sea el argumento, en este caso es $6x$. Despejando primero la función trigonométrica:

$$\tan 6x = 3.267949192 - 5$$
$$\tan 6x = -1.732050808$$

Aplicando la función inversa para despejar el argumento $6x$ (no x), se obtiene:

$$6x = \arctan(-1.732050808)$$

que tiene dos soluciones, las cuales están en el segundo y cuarto cuadrantes ya que en dichos cuadrantes la tangente es negativa. Conforme a lo visto en la página 35, se saca primero la tangente inversa al valor absoluto para obtener que *arc tan* 1.732050808 = 60. Entonces las dos soluciones son:

Segundo cuadrante:	Cuarto cuadrante:
$6x_1 = 180 - 60$ $6x_1 = 120$ $x_1 = \frac{120}{6}$ $x_1 = 20$	$6x_2 = 360 - 60$ $6x_2 = 300$ $x_2 = \frac{300}{6}$ $x_2 = 50$

Ejemplo 3: $\operatorname{sen}(2x + 8) = -0.93969262$

solución: En este caso la función trigonométrica ya está despejada. El ángulo, o sea el argumento es $(2x + 8)$. Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$\operatorname{sen}(2x + 8) = -0.93969262$$
$$(2x + 8) = \operatorname{arc\,sen}(-0.93969262)$$

tiene dos soluciones, las cuales están en el tercero y cuarto cuadrantes, ya que allí el seno es negativo. Conforme a lo visto en la página 35, se saca primero *arco seno* al valor absoluto para obtener que *arc sen* 0.93969262 = 70. Entonces, tomando en cuenta que el valor anterior (70) es igual al argumento, las dos soluciones son:

Tercer cuadrante:	Cuarto cuadrante:
$2x_1 + 8 = 180 + 70$	$2x_2 + 8 = 360 - 70$
$2x_1 + 8 = 250$	$2x_2 + 8 = 290$
$2x_1 = 250 - 8$	$2x_2 = 290 - 8$
$2x_1 = 242$	$2x_2 = 282$
$x_1 = \frac{242}{2}$	$x_2 = \frac{282}{2}$
$x_1 = 121$	$x_2 = 141$

Ejemplo 4: $\cos(x^2 + 10) = 0.275637355$

solución: En este caso el ángulo, o sea el argumento es $(x^2 + 10)$. Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$\cos(x^2 + 10) = 0.275637355$$
$$x^2 + 10 = \text{arc cos } 0.275637355$$

como el *arco coseno de* 0.275637355 es igual a 74, las dos soluciones, las cuales están en el primero y cuarto cuadrantes ya que allí el coseno es positivo, son:

Primer cuadrante:	Cuarto cuadrante:
$x^2 + 10 = 74$	$x^2 + 10 = 360 - 74$
$x^2 = 74 - 10$	$x^2 + 10 = 286$

Primer cuadrante:	Cuarto cuadrante:
$x^2 = 64$ $x = \pm\sqrt{64}$ $x_1 = 8$ $x_2 = -8$	$x^2 = 286 - 10$ $x^2 = 276$ $x_3 = +\sqrt{276}$ $x_4 = -\sqrt{276}$

EJERCICIO 17

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas.

1) $sen\ 3x = 0.707106781$

2) $cos\ 4x = 0.882947592$

3) $tan\ 8x = 5.671281820$

4) $sen\ 10x = 0.766044444$

5) $cos\ 2x = -\ 0.913545457$

6) $tan\ 7x = 1.482560969$

7) $sen\ (3x + 2) = -\ 0.529919264$

8) $cos\ (x - 7) = -\ 0.788010753$

9) $tan\ (5x + 7) = -\ 1.962610506$

10) $sen\ (9 - 2x) = -\ 0.087155742$

11) $cos\ 5x^2 = -\ 0.422618261$

12) $tan\ 3x^2 = -\ 3.077683537$

13) $sen\ (x^2 + 2) = 0.992546151$

14) $cos\ (x^2 - 50) = 0.069756473$

15) $tan\ (x + 70) = -\ 1.962610506$

16) $sen\ (49 - 2x) = -\ 0.087155742$

17) $cos\ 2x^2 = -\ 0.422618261$

18) $tan\ (75 - 3x^2) = -\ 3.077683537$

19) $sen\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0.5$

20) $cos\left(\dfrac{4}{3x}\right) = 0.5$

4.3 ECUACIONES DE LA FORMA *m sen x = n cos x*

Las siguientes ecuaciones trigonométricas más sencillas de resolver son las que tienen la forma *m sen x = n cos x*, donde *m* y *n* son números conocidos, ya que basta escribir la ecuación en la forma

$$\frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{n}{m}$$

dividiendo la ecuación original entre *m cos x* (lo que indebidamente se dice que "pasa a dividir el *coseno* y *m* al otro lado") y sustituir por la tangente, conforme a la fórmula 7 de los cocientes de la página 42. Luego simplemente se despeja la tangente aplicándole la función inversa y teniendo cuidado de localizar los dos valores que le corresponden por el signo de la función, conforme a lo visto en el capítulo 2.

Ejemplo 1: 4 *sen x* = 3 *cos x*

solución: En este caso, $m = 4$ y $n = 3$. La ecuación se puede escribir como:

$$\frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{3}{4}$$

sustituyendo por la tangente, conforme a la fórmula 7 de los cocientes de la página 42, y como $\frac{3}{4} = 0.75$, se llega a que

$$\tan x = 0.75$$

aplicándole la función inversa:

$$x = arc\ tan\ 0.75 = 36.87$$

la cual tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero, ya que allí la tangente es positiva:

Primer cuadrante	Tercer cuadrante
$x_1 = 36.87$	$x_2 = 180 + 36.87$ $x_2 = 216.87$

Ejemplo 2: $5\ sen\ x + 11\ cos\ x = 0$

solución: Restando $11 cos\ x$ en ambos lados (lo que indebidamente se dice que el $11 cos\ x$ pasa al otro lado a restar), la ecuación queda en la forma $m\ sen\ x = n\ cos\ x$. Haciéndolo:

$$5\ sen\ x = -\ 11\ cos\ x$$

En este caso, $m = 5$ y $n = -\ 11$. Dividiendo toda la igualdad anterior entre $5 cos\ x$ (lo que indebidamente se dice que el 5 y el *cos x* pasan al otro lado a dividir), se obtiene:

$$\frac{sen\ x}{cos\ x} = -\frac{11}{5}$$

sustituyendo por la tangente, conforme a la fórmula 7 de los cocientes de la página 42,

y como $\frac{11}{5} = 2.2$, se llega a que

$$tan\ x = -\ 2.2$$

aplicándole la función inversa:

$$x = arc\ tan\ (-\ 2.2)$$

la cual tiene dos soluciones, una en el segundo cuadrante y la otra en el cuarto, ya que allí la tangente es negativa. Recordando que primero se le saca *arco tangente* al valor absoluto de (- 2.2), lo que da *arc tan* 2.2 = 65.556, se tiene que:

Segundo cuadrante	Cuarto cuadrante
$x_1 = 180 - 65.556$ $x_1 = 114.443$	$x_2 = 360 - 65.556$ $x_2 = 294.443$

Ejemplo 3: $10\ sen\ 4x - 5\ cos\ 4x = 0$

solución: Sumando $5\ cos\ 4x$ en ambos lados (lo que incorrectamente se dice que $-\ 5\ cos\ 4x$ pasa al otro lado a sumar), la ecuación queda en la forma $m\ sen\ x = n\ cos\ x$. Haciéndolo:

$$10\ sen\ 4x = 5\ cos\ 4x$$

En este caso, $m = 10$ y $n = 5$. Dividiendo toda la igualdad anterior entre $10\ cos\ 4x$ (lo que erróneamente se dice que pasan a dividir) , se obtiene:

$$\frac{sen\,4x}{cos\,4x} = \frac{5}{10}$$

sustituyendo por la tangente, conforme a la fórmula 7 de los cocientes de la página 42, y como $\frac{5}{10} = 0.5$, se llega a que

$$tan\,4x = 0.5$$

aplicándole la función inversa:

$$4x = arc\,tan\,0.5$$

la cual tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero, ya que allí la tangente es positiva. Recordando que primero se le saca *arco tangente* al valor absoluto de 0.5, lo que da *arc tan* 0.5 = 26.565, se tiene que:

Primer cuadrante	Tercer cuadrante
$4x_1 = 26.565$	$4x_2 = 180 + 26.565$
$x_1 = \frac{26.565}{4}$	$4x_2 = 206.565$
$x_1 = 6.641$	$x_2 = \frac{206.565}{4}$
	$x_2 = 51.641$

EJERCICIO 18

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas

1) $2\,sen\,x = cos\,x$
2) $5\,cos\,x = 6\,sen\,x$
3) $sen\,9x - cos\,9x = 0$
4) $12\,sen\,10x = 4\,cos\,10x$
5) $cos\,2x - 7\,sen\,2x = 0$
6) $8\,sen\,(2x - 2) = 4\,cos\,(2x - 2)$
7) $sen\,(3x + 2) = 5\,cos\,(3x + 2)$
8) $cos\,(x - 7) - 3\,sen\,(x - 7) = 0$
9) $20\,sen\,(5x + 7) = -5\,cos\,(5x + 7)$
10) $12\,sen\,(9 - 2x) = 6\,cos\,(9 - 2x)$

4.4 PASANDO TODO A UNA SOLA FUNCIÓN Y FÓRMULA DE SEGUNDO GRADO

Algunas ecuaciones trigonométricas pueden resolverse fácilmente cuando es posible pasar todas las funciones trigonométricas que aparezcan a una sola función trigonométrica. En caso de que resulte una ecuación de segundo grado, se utiliza la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado, teniendo en cuenta que la incógnita es la función trigonométrica y no x.

Es importante interpretar o entender el significado de una ecuación de segundo grado y de su fórmula general para resolverlas. Por ejemplo, si se tiene la ecuación

$$8x^2 + 2x - 1 = 0$$

interpretada significa: *"ocho veces **la incógnita** al cuadrado, más dos veces **la incógnita**, menos uno es igual a cero".*

De la misma manera, la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado interpretada significa: *"**la incógnita** es igual a: menos b, más menos raíz cuadrada de ..."*, etc. que se escribe:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lo esencial de este asunto está en entender que, por lo general, a esa incógnita se le representa con la letra x; sin embargo, esa representación puede ser cambiada por cualquier otro símbolo. En caso de ser así, lo que se ha cambiado es nada más la representación, no la interpretación. Por ejemplo, se puede cambiar la representación de la incógnita del caso anterior y en vez de x poner $sen\, x$. Es decir, ahora $sen\, x$ representa a la incógnita. De manera que *"ocho veces **la incógnita** al cuadrado, más dos veces **la incógnita**, menos uno es igual a cero"*, se representa por

$$8(sen\, x)^2 + 2(sen\, x) - 1 = 0$$

que es lo mismo que

$$8\, sen^2 x + 2\, sen\, x - 1 = 0$$

La fórmula general para las ecuaciones de segundo grado interpretada para este caso como: *"**la incógnita** es igual a: menos b, más menos raiz cuadrada de ..."*, etc., queda entonces:

$$sen\, x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

por eso se dijo líneas arriba que **la incógnita es la función trigonométrica y no *x*.** Es indispensable para comprender el proceso de estas ecuaciones trigonométricas distinguir perfectamente bien el significado que se le otorga a la palabra **solución**, ya que unas veces se refiere a la solución de la ecuación de segundo grado y otras a la solución de la ecuación trigonométrica. Cuando se resuelve una ecuación de segundo grado en la que la incógnita es *sen x* , sus soluciones son $(sen\ x)_1$ y $(sen\ x)_2$; las cuales, para no escribir el paréntesis se escriben sen_1x y sen_2x; a éstas se les llama *soluciones de la ecuación de segundo grado.* Sin embargo, estas soluciones de la ecuación de segundo grado son a su vez ecuaciones trigonométricas que se pueden resolver por el método 4.2) DESPEJE DIRECTO visto en la página 64 y sus correspondientes soluciones son las *soluciones de las ecuaciones trigonométricas*.

Con los siguientes ejemplos se intentará aclarar lo anterior.

Ejemplo 1: $8\ sen^2x + 2\ sen\ x - 1 = 0$

solución: Se trata de la ecuación de segundo grado anterior, en donde la incógnita es ***sen*** *x*, con los valores $a = +8$; $b = +2$; $c = -1$, de manera que interpretando la fórmula de segundo grado, se tiene que

$$sen\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sustituyendo valores y realizando operaciones:

$$sen\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(8)(-1)}}{2(8)}$$

$$sen\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{16}$$

$$sen\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{16}$$

$$sen\ x = \frac{-2 \pm 6}{16}$$

Recuérdese que la incógnita, respecto de la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado, es *sen x* , por lo que ésta tiene dos soluciones que son

$$sen_1 x = \frac{-2 + 6}{16} = +0.25$$

$$sen_2 x = \frac{-2 - 6}{16} = -0.5$$

Por otra parte, cada una de estas soluciones es a su vez una ecuación trigonométrica que se resuelven por simple despeje, conforme se explicó en el párrafo 4.2) DESPEJE DIRECTO, en la página 64 y, por lo tanto, tienen cada una de ellas dos soluciones, ya que conviene recordar que las funciones trigonométricas son dos positivas y dos negativas según el cuadrante en el que estén.

Entonces, para la primera solución de la ecuación de segundo grado $sen_1\, x = +0.25$, como es positiva le corresponden soluciones trigonométricas en el primero y segundo cuadrantes, pues allí el seno es positivo; en cambio, para la segunda solución de la ecuación de segundo grado $sen_2\, x = -0.5$, como es negativa le corresponden soluciones trigonométricas en el tercero y cuarto cuadrantes, pues allí el seno es negativo.

Lo anterior se muestra en la siguiente cuadro sinóptico:

$$sen\, x = \frac{-2 \pm 6}{16}$$

- $sen_1\, x = \dfrac{-2+6}{16} = +0.25$
  - *primer cuadrante:*
    $\left(\begin{matrix} \alpha = arc\ sen\ 0.25 \\ \alpha = 14.47 \end{matrix}\right)$
    $\boldsymbol{x_1 = 14.47}$
  - *segundo cuadrante:*
    $\left(\begin{matrix} \alpha = arc\ sen\ 0.25 \\ \alpha = 14.47 \end{matrix}\right)$
    $x_2 = 180 - 14.47$
    $\boldsymbol{x_2 = 165.53}$
- $sen_2\, x = \dfrac{-2-6}{16} = -0.5$
  - *tercer cuadrante:*
    $\left(\begin{matrix} \alpha = arc\ sen\ 0.5 \\ \alpha = 30 \end{matrix}\right)$
    $x_3 = 180 + 30$
    $\boldsymbol{x_3 = 210}$
  - *cuarto cuadrante:*
    $\left(\begin{matrix} \alpha = arc\ sen\ 0.5 \\ \alpha = 30 \end{matrix}\right)$
    $x_4 = 360 - 30$
    $\boldsymbol{x_4 = 330}$

En síntesis, las soluciones de la ecuación trigonométrica $8\, sen^2 x + 2\, sen\, x - 1 = 0$ son:

$$\boxed{\begin{matrix} x_1 = 14.47 \\ x_2 = 165.53 \\ x_3 = 210 \\ x_4 = 330 \end{matrix}}$$

COMPROBACIONES:

a) Para $x_1 = 14.47751219$ (tomado con todos sus decimales), sustituyendo en la ecuación original $8\ sen^2 x + 2\ sen\ x - 1 = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 8\ sen^2\, 14.47751219 + 2\ sen\ 14.47751219 - 1 &= 0 \\ 8\,(0.25)^2 + 2\,(0.25) - 1 &= 0 \\ 8\,(0.0625) + 0.5 - 1 &= 0 \\ 0.5 + 0.5 - 1 &= 0 \quad ✓ \end{aligned}$$

b) Para $x_2 = 165.5224878$ (tomado con todos sus decimales), sustituyendo en la ecuación original $8\ sen^2 x + 2\ sen\ x - 1 = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 8\ sen^2\, 165.5224878 + 2\ sen\ 165.5224878 - 1 &= 0 \\ 8\,(0.25)^2 + 2\,(0.25) - 1 &= 0 \\ 8\,(0.0625) + 0.5 - 1 &= 0 \\ 0.5 + 0.5 - 1 &= 0 \quad ✓ \end{aligned}$$

c) Para $x_3 = 210$, sustituyendo en $8\ sen^2 x + 2\ sen\ x - 1 = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 8\ sen^2\, 210 + 2\ sen\ 210 - 1 &= 0 \\ 8\,(-\,0.5)^2 + 2\,(-\,0.5) - 1 &= 0 \\ 8\,(0.25) - 1 - 1 &= 0 \\ 2 - 1 - 1 &= 0 \quad ✓ \end{aligned}$$

d) Para $x_3 = 330$, sustituyendo en $8\ sen^2 x + 2\ sen\ x - 1 = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 8\ sen^2\, 330 + 2\ sen\ 330 - 1 &= 0 \\ 8\,(-\,0.5)^2 + 2\,(-\,0.5) - 1 &= 0 \\ 8\,(0.25) - 1 - 1 &= 0 \\ 2 - 1 - 1 &= 0 \quad ✓ \end{aligned}$$

Ejemplo 2: $21 + 18\cos x = 16\ sen^2 x$

solución: Como $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$, se trata de una ecuación en la que es posible pasar todas las funciones trigonométricas que aparecen a una sola función, en este caso todo a cosenos. Efectivamente, sustituyendo en la ecuación original, se obtiene que

$$21 + 18\cos x = 16\,(1 - \cos^2 x)$$

Efectuando la multiplicación, escribiendo todo en el lado izquierdo y ordenando, resulta:

$$\begin{aligned} 21 + 18\cos x &= 16 - 16\cos^2 x \\ 21 + 18\cos x - 16 + 16\cos^2 x &= 0 \\ 16\cos^2 x + 18\cos x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Se trata de un ecuación de segundo grado, en donde la incógnita es $\cos x$, con los valores $a = +\,16$; $b = +\,18$; $c = +\,5$, de manera que interpretando la fórmula de segundo grado, se tiene que

$$cos\,x = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$cos\,x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4(+16)(+5)}}{2(+16)}$$

$$cos\,x = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 320}}{32}$$

$$cos\,x = \frac{-18 \pm \sqrt{4}}{32}$$

$$cos\,x = \frac{-18 \pm 2}{32}$$

Recuérdese que la incógnita, respecto de la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado, es $cos\,x$, por lo que ésta tiene dos soluciones que son

$$cos_1\,x = \frac{-18 + 2}{32} = -\,0.5$$

$$cos_2\,x = \frac{-18 - 2}{32} = -\,0.625$$

Por otra parte, cada una de estas soluciones es a su vez una ecuación trigonométrica que se resuelven por simple despeje, conforme se explicó en el párrafo 4.2) DESPEJE DIRECTO, en la página 64, y por lo tanto, tienen cada una de ellas dos soluciones, ya que conviene recordar que las funciones trigonométricas son dos positivas y dos negativas según el cuadrante en el que estén.

Para este ejemplo, para la primera solución $cos_1\,x$ = - 0.5, como es negativa le corresponden soluciones trigonométricas en el segundo y tercer cuadrantes, pues allí el coseno es negativo; de la misma forma, para la segunda solución $cos_2\,x$ = - 0.625 , como es negativa le corresponden soluciones trigonométricas en el segundo y tercer cuadrantes, pues allí el coseno es negativo.

Lo anterior se muestra en la siguiente cuadro sinóptico:

$$\cos x = \frac{-18 \pm 2}{32}$$

- $$\cos_1 x = \frac{-18+2}{32} = -0.5$$
  - segundo cuadrante:
    $\alpha = arc\ cos\ 0.5$
    $\alpha = 60$
    $x_1 = 180 - 60$
    $\mathbf{x_1 = 120}$
  - tercer cuadrante:
    $\alpha = arc\ cos\ 0.5$
    $\alpha = 60$
    $x_2 = 180 + 60$
    $\mathbf{x_2 = 240}$
- $$\cos_2 x = \frac{-18-2}{32} = -0.625$$
  - segundo cuadrante:
    $\alpha = arc\ cos\ 0.625$
    $\alpha = 51.31$
    $x_3 = 180 - 51.31$
    $\mathbf{x_3 = 128.69}$
  - tercer cuadrante:
    $\alpha = arc\ cos\ 0.625$
    $\alpha = 51.31$
    $x_4 = 180 + 51.31$
    $\mathbf{x_4 = 231.31}$

En síntesis, las soluciones de la ecuación trigonométrica $21 + 18\cos x = 16\,sen^2 x$ son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 120 \\ x_2 = 240 \\ x_3 = 128.69 \\ x_4 = 231.31 \end{array}}$$

COMPROBACIONES:

a) Para $x_1 = 120$, sustituyendo en la ecuación original $21 + 18\cos x = 16\,sen^2 x$ se tiene que

$$\begin{aligned} 21 + 18\cos 120 &= 16\,sen^2\,120 \\ 21 + 18\,(-\,0.5) &= 16\,(0.866025403)^2 \\ 21 - 9 &= 16\,(0.75) \\ 11 &= 11 \quad ✓ \end{aligned}$$

b) Para $x_2 = 240$, sustituyendo en la ecuación original $21 + 18\,cos\,x = 16\,sen^2 x$ se tiene que

$$\begin{aligned} 21 + 18\,cos\,240 &= 16\,sen^2 240 \\ 21 + 18\,(-\,0.5) &= 16\,(-\,0.866025403)^2 \\ 21 - 9 &= 16\,(0.75) \\ 11 &= 11 \quad ✓ \end{aligned}$$

c) Para $x_3 = 128.6821875$ (tomado con todos sus decimales), sustituyendo en la ecuación original $21 + 18\,cos\,x = 16\,sen^2 x$ se tiene que

$$\begin{aligned} 21 + 18\,cos(128.6821875) &= 16\,sen^2(128.6821875) \\ 21 + 18\,(-\,0.625) &= 16\,(0.780624782)^2 \\ 21 - 11.25 &= 16\,(0.609374998) \\ 9.75 &= 9.75 \quad ✓ \end{aligned}$$

d) Para $x_4 = 231.31781255$ (tomado con todos sus decimales), sustituyendo en la ecuación original $21 + 18\,cos\,x = 16\,sen^2 x$ se tiene que

$$\begin{aligned} 21 + 18\,cos(231.31781255) &= 16\,sen^2(231.31781255) \\ 21 + 18\,(-\,0.625) &= 16\,(-\,0.780624782)^2 \\ 21 - 11.25 &= 16\,(0.609374998) \\ 9.75 &= 9.75 \quad ✓ \end{aligned}$$

Ejemplo 3: $cos\,x - 4\,sen\,x = 2$

solución: Ecuaciones de esta forma se pueden transformar a una ecuación con una sola función trigonométrica conforme a los siguientes pasos:

1) Se despeja una cualquiera de las funciones trigonométricas originales.

2) Aplicando la propiedad de las igualdades (Ley Uniforme) *"lo que se haga de un lado debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve"*, se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación.

3) Se reemplaza una de ellas por la fórmula de los cuadrados que le corresponda.

Regresando al ejemplo $cos\,x - 4\,sen\,x = 2$, despejando *cos x:*

$$cos\,x = 2 + 4\,sen\,x$$

Aplicando la propiedad de las igualdades *"lo que se haga de un lado debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve"*, elevando al cuadrado ambos lados:

$$\begin{aligned} (cos\,x)^2 &= (2 + 4\,sen\,x)^2 \\ cos^2 x &= 4 + 16\,sen\,x + 16\,sen^2 x \end{aligned}$$

Sustituyendo $cos^2 x$ por su equivalente $1 - sen^2 x$:

$$1 - sen^2 x = 4 + 16\ sen\ x + 16\ sen^2 x$$

Escribiendo todo del lado derecho:

$$0 = 4 + 16\ sen\ x + 16\ sen^2 x - 1 + sen^2 x$$

sumando, ordenando y escribiendo todo igualado a cero:

$$17\ sen^2 x + 16\ sen\ x + 3 = 0$$

Se trata de un ecuación de segundo grado, en donde la incógnita es *sen x*, con los valores $a = +17$; $b = +16$; $c = +3$, de manera que interpretando la fórmula de segundo grado, se tiene que

$$sen\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sustituyendo valores y realizando operaciones:

$$sen\ x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(+17)(+3)}}{2(+17)}$$

$$sen\ x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 204}}{34}$$

$$sen\ x = \frac{-16 \pm 7.211102551}{34}$$

Recuérdese que la incógnita, respecto de la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado, es *sen x* , por lo que ésta tiene dos soluciones que son

$$sen_1 x = \frac{-16 + 7.211102551}{34} = -0.258499249$$

$$sen_2 x = \frac{-16 - 7.211102551}{34} = -0.68267722$$

Por otra parte, cada una de estas soluciones es a su vez una ecuación trigonométrica que se resuelven por simple despeje, conforme se explicó en el párrafo 4.2) DESPEJE DIRECTO, en la página 64, y por lo tanto, tienen cada una de ellas dos soluciones, ya que conviene recordar que las funciones trigonométricas son dos positivas y dos negativas según el cuadrante en el que estén.

Para este ejemplo, para la primera solución $sen_1\ x = -0.258499249$, como es negativa le corresponden soluciones trigonométricas en el tercero y cuarto cuadrantes, pues allí el seno es negativo; de la misma forma, para la segunda solución de la ecuación de segundo grado $sen_2\ x = -0.68267722$, como es negativa le corresponden soluciones trigonométricas en el tercero y cuarto cuadrantes, pues allí el seno es negativo.

Lo anterior se muestra en la siguiente cuadro sinóptico:

$$sen\, x = \frac{-16 \pm 7.21102551}{34}$$

$$sen_1\, x = \frac{-16 + 7.21102551}{34}$$

$$= -\ 0.258499249$$

tercer cuadrante:

$$\left(\begin{array}{c} \alpha = arc\ sen\ 0.258499249 \\ \alpha = 14.98089716 \end{array} \right)$$

$$x_1 = 180 + 14.98089716$$

$$\mathbf{x_1 = 194.98089716}$$

cuarto cuadrante:

$$\left(\begin{array}{c} \alpha = \text{arc sen } 0.258499249 \\ \alpha = 14.98089716 \end{array} \right)$$

$$x_2 = 360 - 14.98089716$$

$$\mathbf{x_2 = 345.0191028}$$

$$sen_2\, x = \frac{-16 - 7.21102551}{34}$$

$$= -\ 0.68267722$$

tercer cuadrante:

$$\left(\begin{array}{c} \alpha = arc\ sen\ 0.68267722 \\ \alpha = 43.0530635 \end{array} \right)$$

$$x_3 = 180 + 43.0530635$$

$$\mathbf{x_3 = 223.0530635}$$

cuarto cuadrante:

$$\left(\begin{array}{c} \alpha = arc\ sen\ 0.68267722 \\ \alpha = 43.05320635 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 360 - 43.05320635$$

$$\mathbf{x_4 = 316.9467936}$$

Aparentemente las soluciones de la ecuación trigonométrica $cos\, x - 4\, sen\, x = 2$ son:

$$x_1 = 194.9808972$$
$$x_2 = 345.0191028$$
$$x_3 = 223.0532064$$
$$x_4 = 316.9467936$$

Sin embargo, si se comprueban estas aparentes soluciones, se ve que $x_1 = 194.9808972$ y $x_4 = 316.9467936$ no satisfacen la ecuación original. Esto se debe a que cuando se eleva al cuadrado una ecuación se le agrega una solución, cuando se eleva al cubo se le agregan dos soluciones, etc., pero como las soluciones de las trigonométricas inversas van de dos en dos, en este caso realmente se agregaron dos soluciones, que fueron las mencionadas anteriormente.

De tal manera que en casos como el de este ejemplo en el que es indispensable como parte del proceso elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación, deben comprobarse al final una por una las soluciones obtenidas para detectar las soluciones agregadas y desecharlas.

COMPROBACIONES:

a) Para $x_1 = 194.9808972$, sustituyendo en la ecuación original $\cos x - 4 \operatorname{sen} x = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \cos 194.9808972 - 4 \operatorname{sen} 194.9808972 &= 2 \\ -0.966012064 - 4(-0.258496984) &= 2 \\ -0.966012064 + 1.033987936 &= 2 \end{aligned}$$ **¡falso!**

b) Para $x_2 = 345.0191028$, sustituyendo en la ecuación original $\cos x - 4 \operatorname{sen} x = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \cos 345.0191028 - 4 \operatorname{sen} 345.0191028 &= 2 \\ 0.966012064 - 4(-0.258496984) &= 2 \\ 0.966012064 + 1.033987936 &= 2 \end{aligned}$$ ✓

c) Para $x_3 = 223.0532064$, sustituyendo en la ecuación original $\cos x - 4 \operatorname{sen} x = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \cos 223.0532064 - 4 \operatorname{sen} 223.0532064 &= 2 \\ -0.730720064 - 4(-0.68267722) &= 2 \\ -0.730720064 + 2.73070888 &= 2 \end{aligned}$$ ✓

d) Para $x_4 = 316.9467936$, sustituyendo en la ecuación original $\cos x - 4 \operatorname{sen} x = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \cos 316.9467936 - 4 \operatorname{sen} 316.9467936 &= 2 \\ 0.730720064 - 4(-0.68267722) &= 2 \\ 0.730720064 + 2.73070888 &= 2 \end{aligned}$$ **¡falso!**

Finalmente, deben escribirse las soluciones que realmente lo son, especificando con claridad cuáles sí son y cuáles no, pues de no hacerlo se estaría afirmando que las cuatro aparentes soluciones, lo son.

De tal manera que para este ejemplo las soluciones reales son:

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= 345.019 \\ x_3 &= 223.053 \end{aligned}}$$

Ejemplo 4: $4 \operatorname{sen}^2 x + 21 \operatorname{sen} x + 5 = 0$

solución: Se trata de una ecuación de segundo grado, en donde la incógnita es $\operatorname{sen} x$, con los valores $a = +4$; $b = +21$; $c = +5$, de manera que interpretando la fórmula de segundo grado, se tiene que

$$sen\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sustituyendo valores y realizando operaciones:

$$sen\ x = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4(+4)(+5)}}{2(+4)}$$

$$sen\ x = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 80}}{8}$$

$$sen\ x = \frac{-21 \pm \sqrt{361}}{8}$$

$$sen\ x = \frac{-21 \pm 19}{8}$$

de donde se obtienen dos soluciones para la incógnita *sen x :*

a) Para el valor positivo:

$$sen_1 x = \frac{-21 + 19}{8}$$

$$sen_1 x = \frac{-2}{8} = -0.25$$

Para este ejemplo, para la primera solución $sen_1\ x$ = - 0.25, como es negativa le corresponden soluciones trigonométricas en el tercero y cuarto cuadrantes, pues allí el seno es negativo

Lo anterior se muestra en la siguiente cuadro sinóptico:

$$sen_1\ x = \frac{-2 + 19}{8} = -0.25 \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{tercer cuadrante:} \\ \left(\begin{array}{c} \alpha = \textit{arc sen } 0.25 \\ \alpha = 14.47751219 \end{array} \right) \\ x_1 = 180 + 14.47751219 \\ \mathbf{x_1 = 194.4775122} \\ \\ \textit{cuarto cuadrante:} \\ \left(\begin{array}{c} \alpha = \text{arc sen } 0.25 \\ \alpha = 14.4775122 \end{array} \right) \\ x_2 = 360 - 14.4775122 \\ \mathbf{x_2 = 345.5224878} \end{array} \right.$$

b) Para el valor negativo:

$$sen_2 x = \frac{-21-19}{8}$$

$$sen_2 x = \frac{-40}{8} = -5$$

como los valores de las funciones *seno* y *coseno* (valores absolutos) van de 0 a 1 nada más, no es posible que el seno de algún ángulo sea igual a - 5, como está planteado aquí. Eso significa que este inciso no tiene solución.

Es conveniente que el alumno lo compruebe con la calculadora: cuando intente obtener el *seno inverso* de - 5 la calculadora desplegará en la pantalla un mensaje de error.

Entonces, la ecuación original $4\,sen^2 x + 21\,sen\,x + 5 = 0$ solamente tiene dos soluciones, las obtenidas en el inciso *a*.

$x_1 = 194.477$
$x_2 = 345.522$

EJERCICIO 19

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas

1) $8\,sen^2 x - 11\,sen\,x + 3 = 0$
2) $10\,cos^2 x + 13\,cos\,x + 4 = 0$
3) $20\,sen^2 x + 4\,sen\,x - 7 = 0$
4) $9\,sen^2 x + 5\,sen\,x - 4 = 0$
5) $3\,cos^2 x - cos\,x - 2 = 0$
6) $18\,cos^2 x - 27\,cos\,x + 15 = 0$
7) $2\,cos^2 x + 5\,cos\,x + 2 = 0$
8) $15\,cos^2 x - 16\,cos\,x - 15 = 0$
9) $4\,tan^2 x + 12\,tan\,x - 27 = 0$
10) $8\,tan^2 x - 14\,tan\,x + 3 = 0$

11) $8 + sen\,x = 10\,cos^2 x$
12) $15\,sen^2 x + 16\,cos\,x - 22 = 0$
13) $7\sec^2 x - 4\,tan\,x = 4$
14) $1 + 7\,cos\,x = 6\,sen^2 x$
15) $\sec^2 x + 7\,tan\,x + 11 = 0$
16) $sen^2 5x + cos\,5x + 11 = 0$
17) $5\,cos\,4x + 4 = 2\,sen^2 4x$
18) $5\,cos\,9x = 6\,sen^2 9x$
19) $12\sec^2 2x + 119\,tan\,2x = 22$
20) $8\,tan^2 (3x - 1) - 288 = 0$

21) $11\,sen\,x - 3\,cos\,x = 2$
22) $15\,sen\,x + 6\,cos\,x - 3 = 0$
23) $7\,sen\,x - 4\,cos\,x = 4$
24) $1 + 7\,cos\,x = 6\,sen\,x$
25) $sen\,x + 4\,cos\,x = 1$
26) $23\,cos\,x - sen\,x = 1$
27) $8\,cos\,x + 13\,sen\,x = 2$
28) $6\,cos\,x + 5\,sen\,x = 0.5$
29) $12\,sen\,x - 19\,cos\,x = 0.22$
30) $8\,sen\,x - 5\,cos\,x = 0.1$

4.5 POR FACTORIZACIÓN

Si una ecuación trigonométrica se puede factorizar, quedando igualada a cero, se puede resolver igualando a cero cada factor, en virtud de que *"dos cantidades multiplicadas dan cero solamente que por lo menos una de ellas sea cero"*. Una vez igualado a cero cada factor, para resolverlo se puede utilizar cualquiera de las técnicas vistas anteriormente.

Ejemplo 1: $8\,sen\,x\,cos\,2x - 5\,sen\,x = 0$

solución: Factorizando (por factor común)

$$\text{sen}\,x\,(8\cos 2x - 5) = 0$$

igualando a cero cada factor, en virtud de que *"dos cantidades multiplicadas dan cero solamente que por lo menos una de ellas sea cero"* se obtiene:

ECUACION ORIGINAL FACTORIZADA	**FACTORES IGUALADOS A CERO**	**SOLUCIONES**
$sen\,x\,(\,8\,cos\,2x - 5\,) = 0$	$sen\,x = 0$ (valores en los ejes, ver página 30)	$\boldsymbol{x_1 = 0}$ $\boldsymbol{x_2 = 180}$
	$8\,cos\,2x - 5 = 0$ $8\,cos\,2x = 5$ $cos\,2x = \dfrac{5}{8}$ $cos\,2x = 0.625$	primer cuadrante: $\left(\begin{array}{l}\alpha = arc\,cos\,0.625\\ \alpha = 51.31781255\end{array}\right)$ $2x_3 = 51.31781255$ $x_3 = \dfrac{51.31781}{2}$ $\boldsymbol{x_3 = 25.65890627}$ cuarto cuadrante: $\left(\begin{array}{l}\alpha = arc\,cos\,0.625\\ \alpha = 51.31781255\end{array}\right)$ $2x_4 = 360 - 51.31781255$ $2x_4 = 308.6821875$ $x_4 = \dfrac{308.6821875}{2}$ $\boldsymbol{x_4 = 154.3410937}$

En síntesis, las cuatro soluciones son:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 180 \\ x_3 &= 25.65890627 \\ x_4 &= 154.3410937 \end{aligned}}$$

COMPROBACIONES:

a) Para $x_1 = 0$, sustituyendo en la ecuación original $8\,sen\,x\,cos\,2x - 5\,sen\,x = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 8 \text{ sen } 0 \cos 2(0) - 5 \text{ sen } 0 &= 0 \\ 8\,(0)(1) - 5\,(0) &= 0 \\ 0 &= 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

b) Para $x_2 = 180$, sustituyendo en la ecuación original $8\,sen\,x\,cos\,2x - 5\,sen\,x = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 8 \text{ sen } 180 \cos 2(180) - 5 \text{ sen } 180 &= 0 \\ 8\,(0)(1) - 5\,(0) &= 0 \\ 0 &= 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

c) Para $x_3 = 25.65890627$, sustituyendo en $8\,sen\,x\,cos\,2x - 5\,sen\,x = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 8 \text{ sen } 25.65890627 \cos 2(25.65890627) - 5 \text{ sen } 25.65890627 &= 0 \\ 8\,(0.433012701)(0.625) - 5\,(0.433012701) &= 0 \\ 0 &= 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Nota: En realidad, con esos dígitos no da cero, sino 0.1, pero mientras más decimales se tomen, más se aproximará el resultado a cero.

d) Para $x_4 = 154.3410937$, sustituyendo en $8\,sen\,x\,cos\,2x - 5\,sen\,x = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 8 \text{ sen } 154.3410937 \cos 2(154.3410937) - 5 \text{ sen } 154.3410937 &= 0 \\ 8\,(0.433012701)(0.625) - 5\,(0.433012701) &= 0 \\ 0 &= 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Nota: En realidad, con esos dígitos no da cero, sino 0.1, pero mientras más decimales se tomen, más se aproximará el resultado a cero.

Ejemplo 2: $3\,sen\,x\,tan\,x + 3\,sen\,x - tan\,x - 1 = 0$

solución: Factorizando (por agrupación)

$$\begin{aligned} 3\,sen\,x\,(tan\,x + 1) - 1(tan\,x + 1) &= 0 \\ (3\,sen\,x - 1)(tan\,x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

En virtud de que *"dos cantidades multiplicadas dan cero solamente que por lo menos una* *de ellas sea cero"*, se pueden igualar a 0 cada factor sin que se caiga en ninguna falsedad, pues si el primer factor se considera igual a cero, se obtendría *"cero por cualquier otra cosa igual a cero"*, lo cual es cierto; o bien, si el segundo factor se considera igual a cero, se obtendría *"cualquier cosa por cero igual a cero"*, lo cual es también cierto:

Así que igualando a cero el primer factor $3\ sen\ x - 1$, se obtiene:

$$3 \text{ sen } x - 1 = 0$$
$$3 \text{ sen } x = 1$$
$$sen\ x = \frac{1}{3} = 0.333\overline{3}$$

la cual tiene soluciones en el primero y segundo cuadrantes, ya que allí la función *seno* es positiva.

a) Para el primer cuadrante:

$$\alpha = arc\ sen\ 0.333\overline{3}$$
$$\alpha = 19.47122063$$
$$x_1 = 19.47122063$$

b) Para el segundo cuadrante:

$$\alpha = arc\ sen\ 0.333\overline{3}$$
$$\alpha = 19.47122063$$
$$x_2 = 180 - 19.47122063$$
$$x_2 = 160.5287794$$

Igualando ahora el segundo factor a cero:

$$\tan x + 1 = 0$$
$$\tan x = -1$$

la cual tiene soluciones en el segundo y cuarto cuadrantes, ya que allí la función *tangente* es negativa.

c) Para el segundo cuadrante:

$$\alpha = arc\ tan\ |-1|$$
$$\alpha = 45$$
$$x_3 = 180 - 45$$
$$x_3 = 135$$

d) Para el cuarto cuadrante:

$$\alpha = arc\ tan\left|-1\right|$$
$$\alpha = 45$$
$$x_4 = 360 - 45$$
$$x_4 = 315$$

Así que las cuatro soluciones son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 19.47122063 \\ x_2 = 160.5287794 \\ x_3 = 135 \\ x_4 = 315 \end{array}}$$

Ejemplo 3: $2\ sen\ x = tan\ x$

solución: Como $tan\,x = \dfrac{sen\ x}{cos\,x}$, entonces

$$2\ sen\ x = \frac{sen\ x}{cos\,x}$$

¡CUIDADO!: Un error frecuente que se comete en este tipo de ecuaciones es simplificar la ecuación dividiéndola entre $sen\ x$, obteniendo

$$\frac{2\ \cancel{sen}\ x}{\cancel{sen}\ x} = \frac{\cancel{sen}\ x}{\cancel{sen}\ x\ cos\,x}$$

$$2 = \frac{1}{cos\,x}$$

$2 \cos x = 1$, etc.

El error está en que al dividir entre $sen\ x$ se eliminó una solución. El procedimiento correcto es el siguiente:

$$2\ sen\ x = \frac{sen\ x}{cos\,x}$$

$$2\ sen\ x - \frac{sen\ x}{cos\ x} = 0$$

$$sen\ x\left(2 - \frac{1}{cos\ x}\right) = 0$$

Igualando a cero el primer factor:

$$\text{sen}\ x = 0$$

de donde (ver valores en los ejes, capítulo 1)

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 180$$

Igualando a cero el segundo factor:

$$2 - \frac{1}{cos\ x} = 0$$

multiplicando todo por $cos\ x$:

$$cos\ x\left(2 - \frac{1}{cos\ x}\right) = 0(cos\ x)$$
$$2\ cos\ x - 1 = 0$$
$$2\ cos\ x = 1$$
$$cos\ x = \frac{1}{2}$$
$$cos\ x = 0.5$$

de donde (valores en el primero y cuarto cuadrantes):

$$x_3 = 60$$
$$x_4 = 300$$

En síntesis, las cuatro soluciones son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 180 \\ x_3 = 60 \\ x_4 = 300 \end{array}}$$

EJERCICIO 20

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas

1) $3\, sen\, 2x\, cos\, x - 2\, sen\, 2x = 0$
2) $16\, sen^2 x - cos^2 x = 0$
3) $4\, sen^2 x - 9\, cos^2 x = 0$
4) $8\, sen\, x\, tan\, 5x - 3\, tan\, 5x = 0$
5) $6\, sen^2 x + 7\, sen\, x\, cos\, x - 3\, cos^2 x = 0$
6) $25\, cos^2 x - tan^2 x = 0$
7) $4\, cos^2 x - tan^2 x = 0$
8) $5\, sen\, x\, tan\, 3x + tan\, 3x = 0$
9) $6\, sen\, x\, cos\, x - 2\, sen\, x\, tan\, x + 3\, cos^2 x - cos\, x\, tan\, x = 0$
10) $2\, sen\, x\, cos\, x + 2\, sen\, x + cos\, x\, tan\, x + tan\, x = 0$