OPCIÓN A

1.A.- Dados los puntos **A(1 , 0 ,1)** y **B(0 , 2 , 0)**, y el plano **p ≡ x – 2y – z – 7 = 0**, determinar el plano que es perpendicular al plano **p** y pasa por los puntos **A** y **B**

Los vectores generadores del plano **p’** son el del plano **p** (al ser perpendicular), el que une a los puntos **A** y **B**, y el genérico **AG** formado por el punto general del plano **G** y uno de los puntos dados, se ha tomado el **A**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\ ,\ -2\ ,\ -1) \\ \overrightarrow{AB} = (0\ ,\ 2\ ,\ 0) - (1\ ,\ 0\ ,\ 1) = (-1\ ,\ 2\ ,\ -1) \\ \overrightarrow{AG} = (x\ ,\ y\ ,\ z) - (1\ ,\ 0\ ,\ 1) = (x-1\ ,\ y\ ,\ z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-2(x-1) - y + 2(z-1) - 2(z-1) - 2(x-1) - y = 0 \Rightarrow -4(x-1) - 2y = 0 \Rightarrow -4x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi' \equiv 2x + y - 2 = 0$$

2.A.- Dada las rectas: $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-k}{1}$, $s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$

a) Hallar el valor de **k** para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano

b) Para el valor de **k** obtenido, en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

a) Los vectores de las dos rectas y el formado por el que une dos puntos de la recta formaran un plano o, también, uno es combinación lineal de los otros dos. El determinante formado por los tres es nulo

$$s \equiv z = 1 - 3x \Rightarrow x - y + 1 - 3x = 3 \Rightarrow y = -2 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(0\,,-2\,,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\,,-2\,,-3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (1\,,-2\,,-3) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{RS} = (0\,,-2\,,1) - (1\,,-1\,,k) = (-1\,,-1\,,1-k) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-k) + 2 - 3 - 3 + 1 - 2(1-k) = 0 \Rightarrow -(1-k) - 3 = 0 \Rightarrow -1 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = 4$$

b)

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (1\,,-2\,,-3) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{SG} = (x\,,y\,,z) - (1\,,-1\,,4) - = (x-1\,,y+1\,,z-4) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-4 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-2(x-1) + 3(y+1) + (z-4) - 2(z-4) + 3(x-1) - (y+1) = 0 \Rightarrow (x-1) + 2(y+1) - (z-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x + 2y - z + 5 = 0$$

Comprobación

Veamos si $S(0\,,-2\,,1)$ *pertenece al plano halado* $\Rightarrow 0 + 2(-2) - 1 + 5 = 0 \Rightarrow -4 - 1 + 5 = 0$

Pertenece

3.A.- Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x+4y+3z=9 \\ mx+2y+z=5 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ Se pide:

a) Determinar los valores de **m** para que el sistema dado tenga solución única

b) Resolverlo para **m = 1**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6+4+3m-6-3-4m = -m+1 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -m+1=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow$$

$$\forall m \in \Re - \{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 & 15 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Sist.\ Compat.\ In\det er.$$

$$y = 3 \Rightarrow 3x + 4.3 + 3z = 9 \Rightarrow 3x + 3z = 9 - 12 \Rightarrow 3x + 3z = -3 \Rightarrow x = -1 - z \Rightarrow$$

$$Solución(-1-\lambda\ , 3\ , \lambda)$$

4.A.- Sea la función $f(x)=\dfrac{sen\ x}{2-\cos x}$ definida en el intervalo cerrado y acotado **[- 2p , 2p]**. Se pide:

a) Calcular los puntos del intervalo dado donde **f** alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto.

b) Dibujar la gráfica de la función **f** en el intervalo dado

c) Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

a)

$$f'(x)=\frac{\cos x(2-\cos x)-[-(-senx)]sen\ x}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cos x-\cos^2 x-sen^2 x}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cos x-(\cos^2 x+sen^2 x)}{(2-\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\cos x-1}{(2-\cos x)^2}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\begin{cases}2\cos x-1>0\Rightarrow 2\cos x>1\Rightarrow \cos x>\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}-2\pi+\dfrac{5\pi}{3}<x<-2\pi+\dfrac{\pi}{3}\\ \dfrac{5\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\\ (2-\cos x)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

$$M\acute{a}ximo\ en\ x=-2\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow f\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{sen\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(de\cos x>\frac{1}{2}\ pasa\ a\cos x<\frac{1}{2}\right)$$

$$M\acute{i}nimo\ en\ x=-2\pi+\frac{5\pi}{3}\Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(de\cos x<\frac{1}{2}\ pasa\ a\cos x>\frac{1}{2}\right)$$

$$M\acute{a}ximo\ en\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(de\cos x>\frac{1}{2}\ pasa\ a\cos x<\frac{1}{2}\right)$$

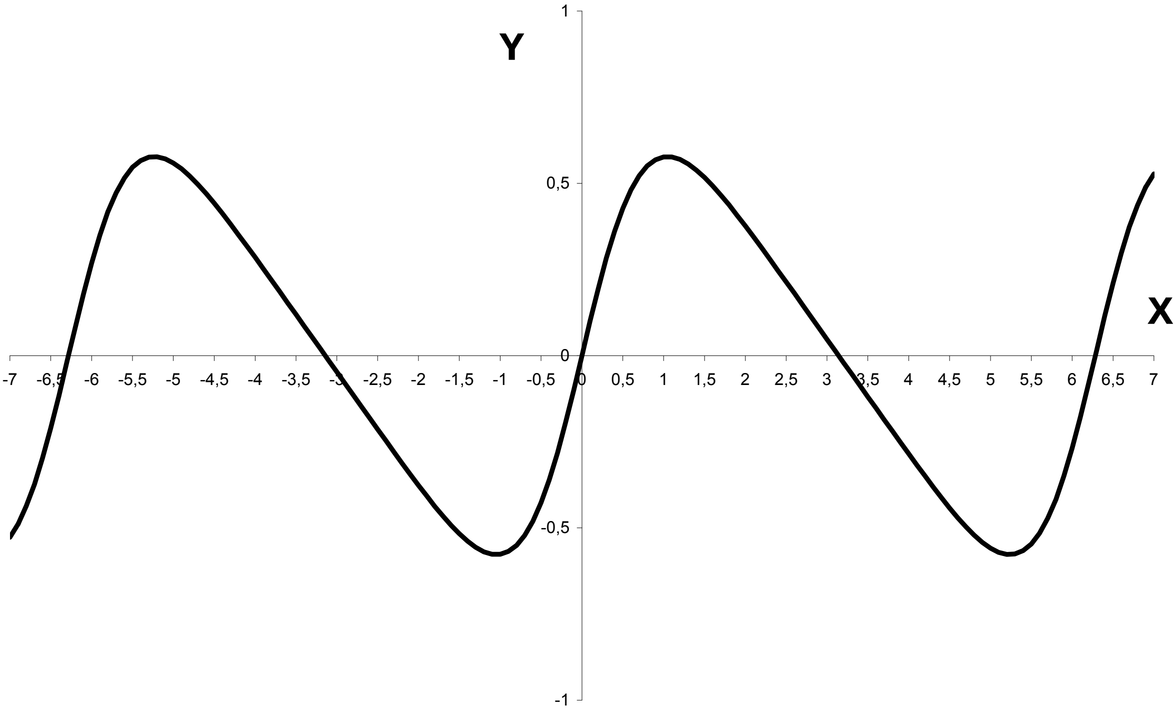
$$M\acute{i}nimo\ en\ x=\frac{5\pi}{3}\Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(de\cos x<\frac{1}{2}\ pasa\ a\cos x>\frac{1}{2}\right)$$

$$f(-2\pi)=f(2\pi)=f(0)=\frac{sen(0)}{2-\cos(0)}=\frac{0}{2-1}=0$$

Son máximo y mínimo relativo y absoluto

Continuación del Problema 4.A.-

b)



$c)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\ x}{2-\cos x}\,dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^{\frac{3}{2}} = \ln\frac{3}{2} - \ln 1 = \ln\frac{3}{2} - 0 = \ln\frac{3}{2}\ u^2$$

$$2-\cos x = t \Rightarrow sen\ x\ dx = dt \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2-\cos 0 = 2-1 = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = 2-\cos\dfrac{\pi}{3} = 2-\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

OPCIÓN B

1.B.- Un mayorista del sector turístico vende a la agencia **A**, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12000 euros. A una segunda agencia **B** le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a internacionales no comunitarios, y cobra 13000 euros. A una tercera agencia **C** le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7000 euros. Se pide:

a) Hallar el precio de cada tipo de billetes

b) Por razones de mercado el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en que porcentaje debe de incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

a)
Siendo el precio de los billetes :
N = Destino nacional E = Destino Europeo I = Destino Internacional

$$\begin{cases} 10N + 10E + 10I = 12000 \\ 10N + 20I = 13000 \\ 10N + 10E = 7000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N + E + I = 1200 \\ N + 2I = 1300 \\ N + E = 700 \end{cases} \Rightarrow 700 + I = 1200 \Rightarrow I = 500 \Rightarrow$$

$$N + 2.500 = 1300 \Rightarrow N = 1300 - 1000 = 300 \Rightarrow 300 + E = 700 \Rightarrow E = 400$$

$$Solución(300\ €,\ 400\ €,\ 500\ €,\ )$$

$b)$

$$300 - \frac{20}{100} \cdot 300 = 300.0'8 = 240\ €$$

$$10.240 + 10.E = 7000 \Rightarrow 10.E = 7000 - 2400 = 4600 \Rightarrow E = \frac{4600}{10} = 460\ € \Rightarrow \frac{460}{400} = \frac{23}{20} = 1'15$$

Aumentará los billetes extranjeros europeos comunitarios en un 15%

2.B.- a) Sean **A** y **B** dos matrices invertibles que verifican la identidad **A + B = AB**. Comprobar que entonces se tiene la fórmula: **$(I - B)^{-1} = - B^{-1}A$**

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ hallar la matriz **B** para la cual se verifica **A + B = AB**

$a)$

$$(I - B)\cdot (I - B)^{-1} = -(I - B)B^{-1}A \Rightarrow I = -(I - B)B^{-1}A \Rightarrow BI = -(I - B)BB^{-1}A \Rightarrow B = -(I - B)A \Rightarrow$$
$$B = -IA + AB \Rightarrow B = -A + AB \Rightarrow A + B = AB$$

$b)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1+a & 1+b \\ 2+c & -1+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1+a = -a+c \\ 1+b = -b+d \\ 2+c = 2a-c \\ -1+d = 2b-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = c+1 \\ 2b = d-1 \\ 2c = 2a-2 \\ 2d = 2b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2a - c = 1 \\ a - c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow -c = 1 \Rightarrow c = -1 \\ \begin{cases} 2b - d = -1 \\ 2b - 2d = -1 \end{cases} \Rightarrow d = 0 \Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \textit{Queda demostrado}$$

3.B.- Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad

b) Dibujar su gráfica

c) Calcular el área del recinto acotado por la gráfica **y = f(x)**, las rectas **x = 0, x = 5** y el eje **OX**

a)

$$4-x>0 \Rightarrow -x>-4 \Rightarrow x<4 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x(4-x) & si \quad x<4 \\ -2x(4-x) & si \quad x\geq 4 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 8x-2x^2 & si \quad x<4 \\ 2x^2-8x & si \quad x\geq 4 \end{cases}$$

Comtinuidad

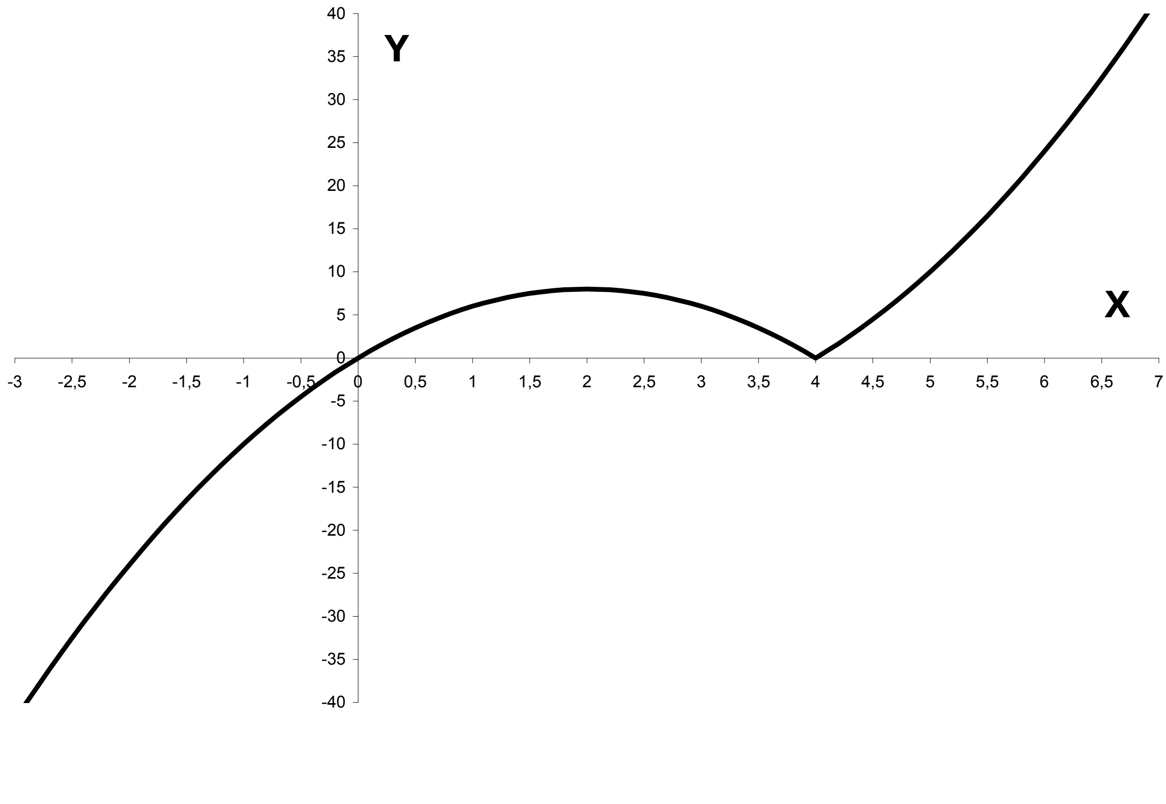
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 2.4(4-4)=0 \\ f(4)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = -2.4(4-4)=0 \end{cases} \Rightarrow f(4)=\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = 0 \Rightarrow Es\ Continua$$

Derivabilidad

$$f(x)=\begin{cases} 2(4-x)-2x & si \quad x<4 \\ -[2(4-x)-2x] & si \quad x>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(4^-)=2(4-4)-2.4=-8 \\ f(4^+)=-[2(4-4)-2.4]=8 \end{cases} \Rightarrow f(4^-)=-8 \neq f(4^+)=8 \Rightarrow$$

No es derivable

b)



Continuación Problema 3.B.-

$c)$

$$A=\int_0^4\left(8x-2x^2\right)dx+\int_4^5\left(2x^2-8x\right)dx=\frac{8}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^4-\frac{2}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^4+\frac{2}{3}\cdot\left[x^3\right]_4^5-\frac{8}{2}\cdot\left[x^2\right]_4^5$$

$$A=4.\left(4^2-0^2\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(4^3-0^3\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(5^3-4^3\right)-4.\left(5^2-4^2\right)=4.16-\frac{2}{3}\cdot 64+\frac{2}{3}\cdot\left(125-64\right)-4.\left(25-16\right)$$

$$A=64-\frac{128}{3}+\frac{122}{3}-36=28-\frac{6}{3}=26\;u^2$$

4.B.- Dado el plano **p ≡ x + y + z = 0** y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide:

a) Calcular el punto **Q** en el que se cortan el plano **p** y la recta **r**.

b) Encontrar un plano **p'**, tal que el punto **Q'** en el que se cortan el plano **p'** y la recta **r** esté a distancia **2** del punto **Q** hallado en el apartado anterior.

$a)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow 1+\lambda+2\lambda-1+2\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow Q\begin{cases} x = 1+0 = 1 \\ y = 2.0 = 0 \\ z = -1+2.0 = -1 \end{cases} \Rightarrow Q(1\,,\,0\,,\,-1)$$

b) Al ser el punto de la recta, utilizaremos su ecuación para, calcular el punto **Q'** merced a la distancia. Para hallar el plano **p'** utilizaremos el vector **QQ'** (que nos indica la mínima distancia) que es el vector del plano ya que es perpendicular a él y el punto **Q'** que pertenece a él

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow d_{QQ'} = 2 = \sqrt{(1+\lambda-1)^2 + (2\lambda-0)^2 + (-1+2\lambda+1)} \Rightarrow 4 = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 \Rightarrow$$

$$9\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ \lambda = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow Tenemos\ dos\ puntos\ Q'$$

$\Pr imera\ Solución$

$$\lambda = \frac{2}{3} \Rightarrow Q'\begin{cases} x = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\ y = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ z = -1+2\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow Q'\left(\frac{5}{3}\,,\,\frac{4}{3}\,,\,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{QQ'} = \left(\frac{5}{3}\,,\,\frac{4}{3}\,,\,\frac{1}{3}\right) - (1\,,\,0\,,\,-1) = \left(\frac{2}{3}\,,\,\frac{4}{3}\,,\,\frac{4}{3}\right)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{QQ'} \equiv (1\,,\,2\,,\,2) \\ \overrightarrow{Q'G} \equiv (x\,,\,y\,,\,z) - \left(\frac{5}{3}\,,\,\frac{4}{3}\,,\,\frac{1}{3}\right) = \left(x-\frac{5}{3}\,,\,y-\frac{4}{3}\,,\,z-\frac{1}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{QQ'} \perp \overrightarrow{Q'G} \Rightarrow \overrightarrow{QQ'}.\overrightarrow{Q'G} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\,,\,2\,,\,2)\cdot\left(x-\frac{5}{3}\,,\,y-\frac{4}{3}\,,\,z-\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right) + 2\left(y-\frac{4}{3}\right) + 2\left(z-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x+2y+2z-\frac{15}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi' \equiv x+2y+2z-5 = 0$$

Continuación del problema 4.B.-

Segunda Solución

$$\lambda = -\frac{2}{3} \Rightarrow Q'\begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3} \\ z = -1 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow Q'\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{QQ'} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right) - (1, 0, -1)$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) \equiv (-1, -2, -2) \equiv (1, 2, 2)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{QQ'} \equiv (1, 2, 2) \\ \overrightarrow{Q'G} \equiv (x, y, z) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right) = \left(x - \frac{1}{3}, y + \frac{4}{3}, z + \frac{7}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{QQ'} \perp \overrightarrow{Q'G} \Rightarrow \overrightarrow{QQ'}.\overrightarrow{Q'G} = 0 \Rightarrow$$

$$(1, 2, 2) \cdot \left(x - \frac{1}{3}, y + \frac{4}{3}, z + \frac{7}{3}\right) = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right) + 2\left(y + \frac{4}{3}\right) + 2\left(z + \frac{7}{3}\right) \Rightarrow x + 2y + 2z + \frac{21}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi' \equiv x + 2y + 2z + 7 = 0$$