

Junio de 2006**OPCIÓN A**

1.A.- Dado el sistema homogéneo:
$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$
, averiguar para que valores de k tiene

soluciones distintas de $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Resolverlo en cada caso

Si la solución es distinta a la trivial el sistema es Compatible Indeterminado y, por ello, el determinante de los coeficientes es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k(k+1) - k - (k+1) - 1 = k^2 + k - k - k - 1 - 1 = k^2 - k - 2 \Rightarrow$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1+3}{2} = 2 \\ k = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

Si $k = 2$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x + y = 0 \Rightarrow y = -3x \Rightarrow x + 2(-3x) - z = 0 \Rightarrow -5x - z = 0 \Rightarrow z = -5x \Rightarrow$$

Solución $(\lambda, -3\lambda, -5\lambda)$

Si $k = -1$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x - 0 - z = 0 \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow x = z \Rightarrow$$

Solución $(\mu, 0, \mu)$

2.A.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AP=PA$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ c = c \\ d = 2c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = d \\ a = d \\ b \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

3.A.- a) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, indicando su dominio, intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus asíntotas

b) Demostrar que la sucesión $a_n = \frac{2n}{n+1}$ es monótona creciente

c) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$

a)

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow \text{Creciente si } f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ (x+1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

Creciente $\forall x \in \mathbb{R}$

Asíntotas verticales

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{2 \cdot (-1)}{-1^- + 1} = \frac{-2}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{2 \cdot (-1)}{-1^+ + 1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{2}{1+0} = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(-x)}{(-x)+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x+1} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 \cdot \frac{x}{x}}{-\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{-1 + \frac{1}{x}} = \frac{-2}{-1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{-2}{-1+0} = 2 \Rightarrow$$

$$y = 2 \Rightarrow x \rightarrow -\infty$$

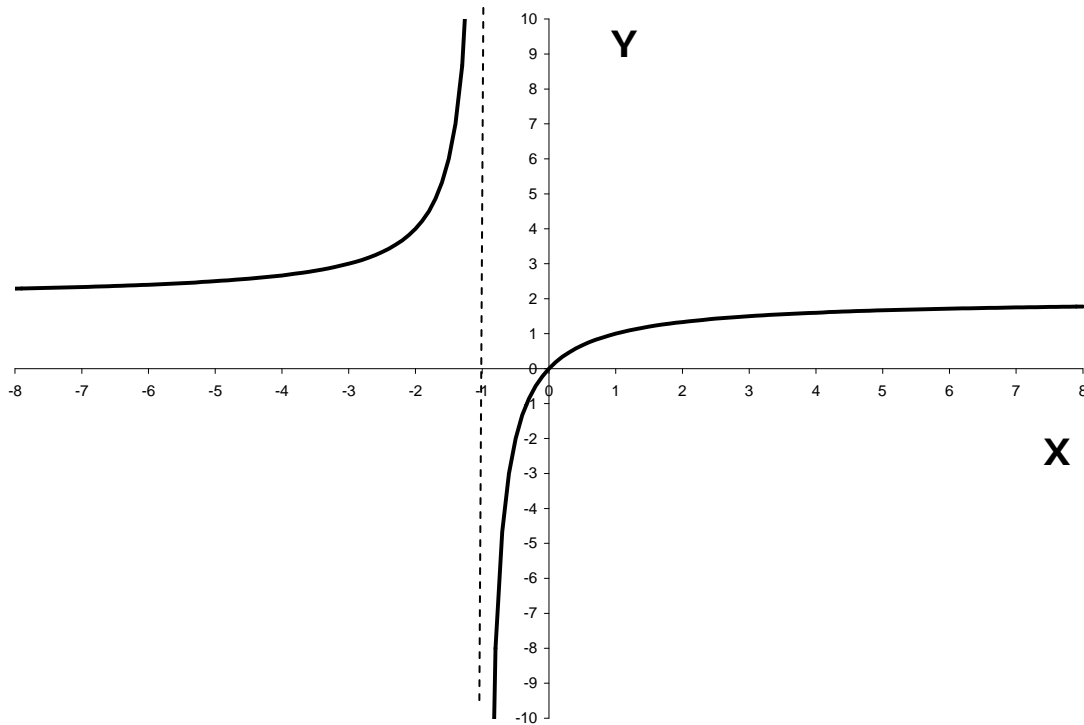
Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ asíntota oblicua } \rightarrow \infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(-x)}{(-x)(-x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-x+1} = \frac{2}{-\infty} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ asíntota oblicua } \rightarrow -\infty$$

Continúa el problema 3.A.-

a) Continuación



b)

$$\text{Creciente cuando } a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{(2n+2)(n+1) - 2n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2 - (2n^2 + 4n)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2 - 2n^2 - 4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

$$\text{Como } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0 \Rightarrow \text{Sucesión monótona creciente}$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{2}{(n+2)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + 3n + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + 3 \frac{n}{n^2} + \frac{2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = \\ &= \frac{2}{1 + \frac{3}{\infty} + \frac{2}{\infty}} = \frac{2}{1 + 0 + 0} = 2 \end{aligned}$$

4.A.- Sean las rectas $r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4}$ y $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$

a) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores

b) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s .

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 1, -2) \Rightarrow r: \begin{cases} -1-\lambda \\ 2+\lambda \\ -2\lambda \end{cases} \\ s: \begin{cases} 2+3\mu \\ -1+\mu \\ -2+\mu \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_t = (-1-\lambda-2-3\mu, 2+\lambda+1-\mu, -2\lambda+2-\mu)$$

$$t: \frac{x+1+\lambda}{-\lambda-3\mu-3} = \frac{y-2-\lambda}{\lambda-\mu+3} = \frac{z+2\lambda}{-2\lambda-\mu+2} \Rightarrow \text{Con } O(0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\frac{0+1+\lambda}{-\lambda-3\mu-3} = \frac{0-2-\lambda}{\lambda-\mu+3} = \frac{0+2\lambda}{-2\lambda-\mu+2} \Rightarrow \begin{cases} (1+\lambda)(\lambda-\mu+3) = (-2-\lambda)(-\lambda-3\mu-3) \\ 2\lambda(\lambda-\mu+3) = (-2-\lambda)(-2\lambda-\mu+2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda-\mu+3+\lambda^2-\mu\lambda+3\lambda = 2\lambda+6\mu+6+\lambda^2+3\mu\lambda+3\lambda \\ 2\lambda^2-2\lambda\mu+6\lambda = 4\lambda+2\mu-4+2\lambda^2+\mu\lambda-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda-7\mu-3-4\mu\lambda = 0 \\ -3\lambda\mu+4\lambda-2\mu+4 = 0 \end{cases}$$

$$-\lambda(1+4\mu) = 7\mu+3 \Rightarrow \begin{cases} -\lambda(1+4\mu) = 7\mu+3 \Rightarrow \lambda = -\frac{7\mu+3}{1+4\mu} \\ \lambda(4-3\mu) = 2\mu-4 \Rightarrow \lambda = \frac{2\mu-4}{4-3\mu} \end{cases} \Rightarrow -\frac{7\mu+3}{1+4\mu} = \frac{2\mu-4}{4-3\mu} \Rightarrow$$

$$-(7\mu+3)(4-3\mu) = (2\mu-4)(1+4\mu) \Rightarrow -(28\mu-21\mu^2+12-9\mu) = 2\mu+8\mu^2-4-16\mu \Rightarrow$$

$$-19\mu+21\mu^2-12 = -14\mu+8\mu^2-4 \Rightarrow 13\mu^2-5\mu-8 = 0 \Rightarrow \Delta = 25+413.8 = 25+416 = 441 > 0$$

$$\mu_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{441}}{26} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = \frac{5+21}{26} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot 1 - 4}{4 - 3 \cdot 1} = -2 \\ \mu_2 = \frac{5-21}{26} = -\frac{16}{26} = -\frac{8}{13} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \left(-\frac{8}{13}\right) - 4}{4 - 3 \cdot \left(-\frac{8}{13}\right)} = \frac{-16 - 52}{13} = -\frac{68}{13} = -\frac{68}{13} = -\frac{17}{7} \end{cases}$$

$$\text{Cuando } \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_t = [-(-2) - 3 \cdot 1 - 3, (-2) - 1 + 3, -2(-2) - 1 + 2] = (-4, 0, 5) \Rightarrow$$

$$\frac{x+1+(-2)}{-4} = \frac{y-2-(-2)}{0} = \frac{z+2(-2)}{5} \Rightarrow \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{0} = \frac{z-4}{5}$$

$$\text{Cuando } \begin{cases} \mu = -\frac{8}{13} \\ \lambda = -\frac{17}{7} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_t = \left(\frac{116}{91}, \frac{220}{91}, \frac{680}{91} \right) = (29, 55, 170) \Rightarrow \frac{x - \frac{10}{7}}{29} = \frac{y + \frac{3}{7}}{55} = \frac{z + \frac{34}{7}}{170}$$

Continúa el problema 4.A.-

b) El vector de la recta p buscada es perpendicular a los vectores directores de las rectas dadas r y s , por lo tanto sus productos escalares son nulos. Después hallaremos uno de los puntos de corte A y así tendremos la ecuación de la recta p

$$\begin{cases} \vec{v}_p = (-3 - \lambda - 3\mu, 3 + \lambda - \mu, 2 - 2\lambda - \mu) \\ \vec{v}_r = (-1, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_p \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_p \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_p = (-3 - \lambda - 3\mu, 3 + \lambda - \mu, 2 - 2\lambda - \mu) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_p \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_p \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (-3 - \lambda - 3\mu, 3 + \lambda - \mu, 2 - 2\lambda - \mu) \cdot (-1, 1, -2) = 0 \\ (-3 - \lambda - 3\mu, 3 + \lambda - \mu, 2 - 2\lambda - \mu) \cdot (3, 1, 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6 + 2\lambda + 2\mu - 4 + 4\lambda + 2\mu = 0 \\ -9 - 3\lambda - 9\mu + 5 - \lambda - 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 6\lambda + 4\mu = 0 \\ -4 - 4\lambda - 11\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 12\lambda + 8\mu = 0 \\ -12 - 12\lambda - 33\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-8 - 25\mu \Rightarrow \mu = -\frac{8}{25} \Rightarrow 1 + 3\lambda + 2 \cdot \left(-\frac{8}{25}\right) = 0 \Rightarrow 3\lambda = \frac{16}{25} - 1 = -\frac{9}{25} \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{25} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_p = \left[-3 - \left(-\frac{3}{25}\right) - 3\left(-\frac{8}{25}\right), 3 + \left(-\frac{3}{25}\right) - \left(-\frac{8}{25}\right), 2 - 2\left(-\frac{3}{25}\right) - \left(-\frac{8}{25}\right) \right]$$

$$\vec{v}_p = \left(\frac{-75 + 3 + 24}{25}, \frac{75 - 3 + 8}{25}, \frac{50 + 6 + 8}{25} \right) = \left(\frac{48}{25}, \frac{80}{25}, \frac{64}{25} \right) \equiv (3, 5, 4)$$

$$A \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - \lambda = -1 - \left(-\frac{3}{25}\right) = \frac{-25 + 3}{25} = -\frac{22}{25} \\ y = 2 + \lambda = 2 + \left(-\frac{3}{25}\right) = \frac{50 - 3}{25} = \frac{47}{25} \\ z = -2\lambda = -2 \cdot \left(-\frac{3}{25}\right) = \frac{6}{25} \end{array} \right. \Rightarrow p: \begin{cases} x = -\frac{22}{25} + 3\gamma \\ y = \frac{47}{25} + 5\gamma \\ z = \frac{6}{25} + 4\gamma \end{cases}$$

OPCIÓN B

1.B.- Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director

$\vec{v} = (4, 3, 1)$. Hallar el punto P contenido en dicha recta tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow P(4\lambda, 3\lambda, \lambda) \Rightarrow \text{Proyección de } P \text{ sobre } \pi \Rightarrow v_{\pi} = (0, 0, 1) \Rightarrow s: \begin{cases} x = 4\lambda + 0\mu = 4\lambda \\ y = 3\lambda + 0\mu = 3\lambda \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Intersección de } s \text{ con el plano } \pi \Rightarrow \lambda + \mu = 0 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P(4\lambda, 3\lambda, 0)$$

$$\begin{cases} \vec{OP} = (4\lambda, 3\lambda, \lambda) - (0, 0, 0) = (4\lambda, 3\lambda, \lambda) \\ \vec{OQ} = (4\lambda, 3\lambda, 0) - (0, 0, 0) = (4\lambda, 3\lambda, 0) \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{OP} \times \vec{OQ}| = 1 \Rightarrow$$

$$\vec{OP} \times \vec{OQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4\lambda & 3\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda & 0 \end{vmatrix} = 4\lambda^2 \vec{j} + 12\lambda^2 \vec{k} - 12\lambda^2 \vec{k} + 3\lambda^2 \vec{i} = 3\lambda^2 \vec{i} + 4\lambda^2 \vec{j} \Rightarrow |\vec{OP} \times \vec{OQ}| = \sqrt{(3\lambda^2)^2 + (4\lambda^2)^2}$$

$$|\vec{OP} \times \vec{OQ}| = 2 \Rightarrow \sqrt{(3\lambda^2)^2 + (4\lambda^2)^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{9\lambda^4 + 16\lambda^4} = 2 \Rightarrow 5\lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{5}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Hay dos soluciones:

$$P_1 \begin{cases} x = 4 \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} \\ y = 3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} \\ z = \frac{\sqrt{10}}{5} \end{cases} \quad y \quad P_1 \begin{cases} x = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right) = -4 \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} \\ y = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right) = -3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{5} \\ z = -\frac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

2.B.- Determinar la posición relativas de las rectas $r: \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1}$ y

$$s: \begin{cases} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Dos rectas pueden ser paralelas o ser la misma recta, en ese caso sus vectores directores serán proporcionales; cortarse en un punto (ser secantes) y si ninguno de esos casos se da se cruzarán

$$r: \begin{cases} x = -4 - 3\lambda \\ y = 7 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(-4, 7, 0) \\ \vec{v}_r = (-3, 4, 1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} -2x - 4y + 10z + 10 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow -3y + 12z + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$3y = 12z + 6 \Rightarrow y = 4z + 2 \Rightarrow x + 2 \cdot (4z + 2) - 5z - 5 = 0 \Rightarrow x + 3z - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - 3z$$

$$r: \begin{cases} x = 1 - 3\mu \\ y = 2 + 4\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(1, 2, 0) \\ \vec{v}_s = (-3, 4, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_s \Rightarrow \text{Son paralelas o coincidentes}$$

Veamos si tienen algún punto común

$$\begin{cases} -4 - 3\lambda = 1 - 3\mu \\ 7 + 4\lambda = 2 + 4\mu \Rightarrow \lambda = \mu \Rightarrow -4 - 3\lambda = 1 - 3\lambda \Rightarrow -4 \neq 1 \Rightarrow \text{Incompatible} \\ \lambda = \mu \end{cases}$$

No son la misma recta \Rightarrow SON PARALELAS

3.B.- Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

a) Determinar el rango de M según valores del parámetro a

b) Determinar para que valores de a existe la matriz inversa de M . Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 2a^3 + 2a + 2a + 2a = -2a^3 + 2a = 2a(1 - a^2) \Rightarrow \text{Si } 2a(1 - a^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Si } |M| = 0 \Rightarrow 2a(1 - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \Rightarrow \text{rango}(M) = 3 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

Cuando $a = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Cuando } a = -1 \Rightarrow \text{rango}(M) = 2$$

Cuando $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Cuando } a = 0 \Rightarrow \text{rango}(M) = 2$$

Cuando $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Cuando } a = 1 \Rightarrow \text{rango}(M) = 2$$

Continuación del problema 3B.-

b)

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \Rightarrow \text{rango}(M) = 3 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

$$\text{Si } a = 2 \Rightarrow |M| = 2a(1 - a^2) = 2 \cdot 2 \cdot (1 - 2^2) = 4 \cdot (-3) = -12 \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \text{adj}(M^t)$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(M^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(M^t) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

4.B.- a) Estudiar y representar gráficamente la función: $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

b) Halla el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$ y $x = \frac{5}{2}$

a)

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Puntos de corte con los ejes

$$\text{Con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{Con } OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{(0-2)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

Simetría

$$f(-x) = \frac{1}{(-x-2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} \neq f(x) \Rightarrow \text{No es simétrica respecto a } OY \text{ ni al origen de coordenadas}$$

Asíntotas

$$\text{Verticales} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(2^- - 2)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(2^+ - 2)^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{cases}$$

Horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \exists y = 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(-x-2)^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \exists y = 0 \Rightarrow x \rightarrow -\infty$$

Oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(x-2)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(x-2)^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \emptyset$$

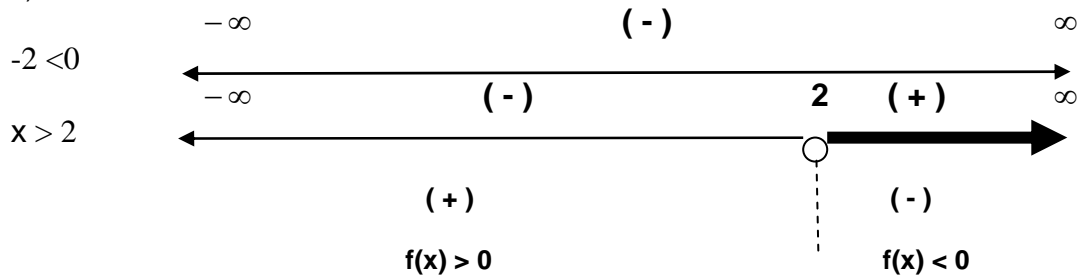
$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{(x-2)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(-x)(-x-2)^2} = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow \emptyset$$

Crecimiento

$$f'(x) = \frac{-2(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{2}{(x-2)^3} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ (x-2)^3 > 0 \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 2 \end{cases}$$

Continúa el problema 4.B.-

a) Continuación



Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / x < 2$

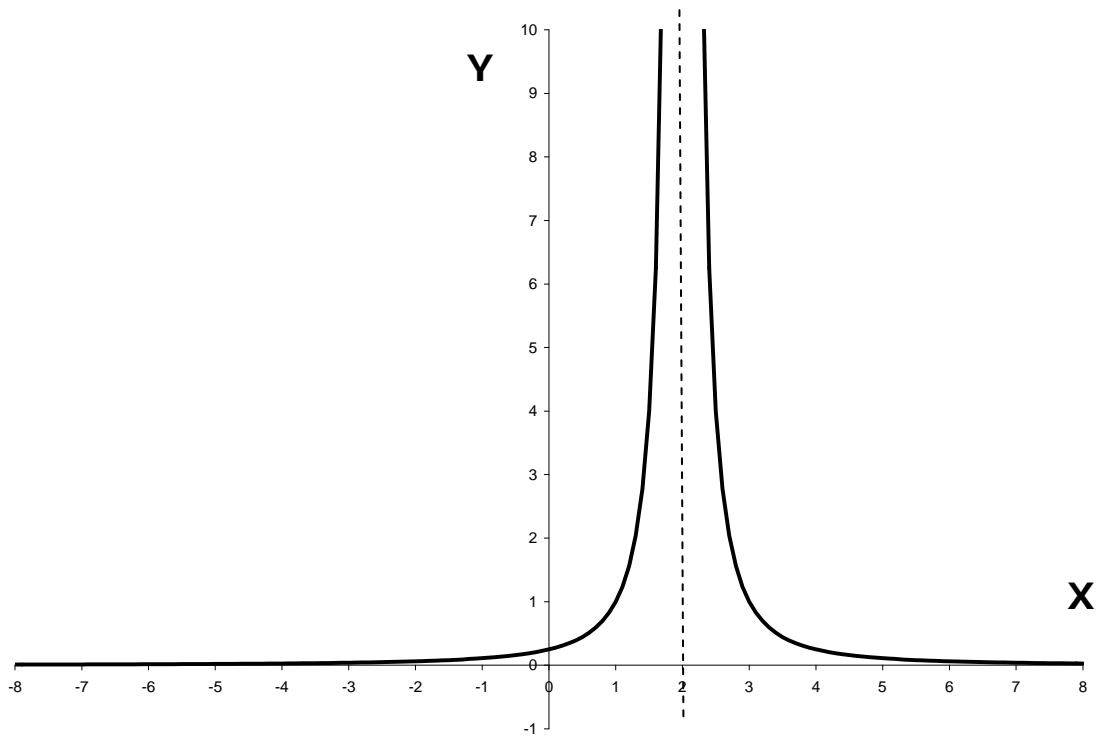
Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / x > 2$

No hay máximos ni mínimos porque correspondería en el punto $x = 2$ en donde hay una asíntota vertical

Concavidad y convexidad

$$f'''(x) = -2 \frac{-3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{6}{(x-2)^4} \implies f'''(x) > 0 \implies \begin{cases} 6 > 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} \\ (x-2)^4 > 0 \implies \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \text{Cóncavo } \forall x \in \mathbb{R}$$

No hay puntos de inflexión



Continúa el problema 4.B.-

b)

$$y = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x = \frac{4-2}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Como } x > 2 \Rightarrow x = 3$$

$$A = \int_{\frac{5}{2}}^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx - \int_{\frac{5}{2}}^1 1 dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^2} dt - [x]_{\frac{5}{2}}^1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-2} dt = \frac{1}{-1} \cdot [t^{-1}]_{\frac{1}{2}}^1 - \left(3 - \frac{5}{2}\right) = -\left[\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2}$$

$$x-2 = t \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{5}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow dx = dt$$

$$A = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2} = -(1-2) - \frac{1}{2} = -(-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} u^2$$