

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el sistema
$$\begin{cases} \lambda x + \lambda z = 2 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$$
 se pide:

- a) (1'5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ
 b) (1'5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - \lambda^2 + 3\lambda = 6\lambda \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado}$

Si $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 0 \neq 2 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b)

Si $\lambda = 1$

Es un Sistema Compatible Deter min ado, pudiendose solucionar por Gauss o por Cramer

Por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 - 2z = -1 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{2}$$

Solución $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función: $f(x) \equiv \frac{x-1}{(x+1)^2}$, se pide:

a) (1'5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas de **f**

b) (1'5 puntos). Calcula el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de **f**, el eje **OX** y las rectas **x = 0** y **x = 3**

a)

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)(x-1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^3} = \frac{x+1-2x+2}{(x+1)^3} = \frac{3-x}{(x+1)^3} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3-x=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow f''(x) = \frac{-(x+1)^3 - 3(x+1)^2(3-x)}{(x+1)^6} = \frac{-(x+1) - 3(3-x)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x-1-9+3x}{(x+1)^4} = \frac{2x-10}{(x+1)^4} \Rightarrow f''(3) = \frac{2 \cdot 3 - 10}{(3+1)^4} = -\frac{4}{4^4} = -\frac{1}{4^3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$\text{Máximo relativo en } x=3 \Rightarrow f(3) \equiv \frac{3-1}{(3+1)^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \left(3, \frac{1}{8}\right)$$

Asíntotas verticales

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1) \equiv \frac{-1-1}{(-1+1)^2} = -\frac{2}{0} \Rightarrow \text{En } x=-1 \Rightarrow \text{Asíntota vertical}$$

$$\text{En } x=-1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2}{(-1^-+1)^2} = -\frac{2}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-2}{(-1^++1)^2} = -\frac{2}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{Asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + 2\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{1 + 2\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{0-0}{1+0+0}$$

Asíntota horizontal $y=0 \Rightarrow$ cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{x^2-2x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - 2\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{1 - 2\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1}$$

Asíntota horizontal $y=0 \Rightarrow$ cuando $x \rightarrow -\infty$

El máximo que hemos dicho relativo es absoluto también ya que su valor, como función, es mayor que 0 y evidentemente mayor que $-\infty$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción A*Punto de corte de la función con OX*

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1, 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \in (0, 1) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}-1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} = -\frac{4}{2 \cdot 9} = -\frac{2}{9} < 0 \\ x = 2 \in (1, 3) \Rightarrow f(2) = \frac{2-1}{(2+1)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} > 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$I = \int \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{t} dt - 2 \int \frac{1}{t^2} dx = \ln t - 2 \int t^{-2} dx = \ln(x+1) - 2 \cdot (-1) \cdot t^{-1}$$

$$x+1 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} \Rightarrow A(x+1)+B = x-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow A(-1+1)+B = -1-1 \\ x=-2 \Rightarrow A(-2+1)+B = -2-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B = -2 \Rightarrow B = -2 \\ A \cdot (-1) + B = -3 \Rightarrow -A - 2 = -3 \Rightarrow -A = -1 \Rightarrow A = 1 \end{cases}$$

$$I = \ln(x+1) + 2 \cdot \frac{1}{t} = \ln(x+1) + \frac{2}{(x+1)} + K \Rightarrow$$

$$A = \left| \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx \right| + \int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = \int_1^0 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx + \int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx$$

$$A = \left[\ln(x+1) + \frac{2}{(x+1)} \right]_1^0 + \left[\ln(x+1) + \frac{2}{(x+1)} \right]_1^3 =$$

$$A = \left[\ln(0+1) + \frac{2}{(0+1)} - \ln(1+1) - \frac{2}{(1+1)} \right] + \left[\ln(3+1) + \frac{2}{(3+1)} - \ln(1+1) - \frac{2}{(1+1)} \right]$$

$$A = \ln 1 + \frac{2}{1} - \ln 2 - \frac{2}{2} + \ln 4 + \frac{2}{4} - \ln 2 - \frac{2}{2} = 2 + \frac{1}{2} - 1 - 1 + \ln 4 - 2 \ln 2 = \left(\frac{1}{2} + \ln 4 - 2 \ln 2 \right) u^2$$

$$\text{o también } A = \frac{1}{2} + \ln 4 - \ln 2^2 = \frac{1}{2} + \ln 4 - \ln 4 = \frac{1}{2} u^2$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ y $s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$, se pide

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y s

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s

a)

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (2, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_s \Rightarrow \text{Son paralelas o coincidentes}$$

Veamos si no tienen o tienen infinito puntos comunes

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\mu \\ y = 4 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + 2\lambda = 5 + 2\mu \\ \lambda = 4 + \mu \\ -1 + \lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda - 2\mu = 6 \\ \lambda - \mu = 4 \\ \lambda - \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 3 \\ \lambda - \mu = 4 \\ \lambda - \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Las rectas r y s son paralelas al no tener ningún punto común

b) Tomando el vector común a ambas, el vector formado por un punto de cada una y el vector genérico formado por uno cualquiera de esos puntos y el genérico, que son coplanarios se generará el plano π pedido.

Se podrá realizar, también, generando un haz de planos por una de la rectas y hallando la que pasa por uno de los puntos de la otra.

Primera forma

a)

$$\text{Tomando} \Rightarrow \begin{cases} R(-1, 0, -1) \Rightarrow \text{Punto dado en la ecuación de la recta } r \\ S(5, 4, 0) \Rightarrow \text{Punto dado en la ecuación de la recta } s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = \vec{v}_s = (2, 1, 1) \\ \vec{RS} = (5, 4, 0) - (-1, 0, -1) = (6, 4, 1) \\ \vec{RG} = (x, y, z) - (-1, 0, -1) = (x+1, y, z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x+1+6y+8(z+1)-6(z+1)-2y-4(x+1)=0 \Rightarrow -3(x+1)+4y+2(z+1)=0 \Rightarrow -3x+4y+2z-1=0$$

$$\pi \equiv 3x-4y-2z+1=0$$

Segunda forma.- Tomando el haz de recta generados por r y el punto S

$$r \equiv \begin{cases} x+1=2y \Rightarrow x-2y+1=0 \\ z+1=y \Rightarrow z-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Haz de planos} \Rightarrow x-2y+1+a(z-y+1)=0 \Rightarrow$$

$$\text{Pasando por } S \Rightarrow 5-2 \cdot 4+1+a(0-4+1)=0 \Rightarrow -2-3a=0 \Rightarrow a=-\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$x-2y+1-\frac{2}{3}(z-y+1)=0 \Rightarrow 3x-6y+3-2z+2y-2=0 \Rightarrow \pi \equiv 3x-4y-2z+1=0$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$ y $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide

a) (1 punto) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α con β

b) (1 punto) Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$

a)

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ -2x + 4y - 12z = 0 \end{cases} \Rightarrow 5y - 10z + 1 = 0 \Rightarrow 5y = 10z - 1 \Rightarrow y = \frac{10z - 1}{5} \Rightarrow$$

$$2x + 2z - \frac{1}{5} + 2z + 1 = 0 \Rightarrow 2x + 4z + \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow 2x = -4z - \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{-4z - \frac{4}{5}}{2} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2\lambda \\ y = -\frac{1}{5} + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b)

El plano buscado, al ser paralelo, es de la forma $2x + y + z + D = 0$, y pasara por el punto dado, con esos datos calcularemos D

$$2x + y + 2z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{2} + 1 + 2 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \cdot \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \gamma \equiv 2x + y + 2z - 2 \cdot \sqrt{2} - 1 = 0$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A - 3I$

b) (1 punto). Demostrar que la matriz A^{-1} es $\frac{1}{3}(4I - A)$

c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \\ -8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ 4A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ -8 & 8 & 12 \end{pmatrix} \\ 3I = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$A^2 - 4A - 3I = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \\ -8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ -8 & 8 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = -6 \cdot I$$

b)

$$4I - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3}(4I - A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 + 3 = 3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 4I - A$$

Continuación de la Ejercicio 1 de la Opción B

c)

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 + 1 = 1 \Rightarrow |A - 2I| \neq 0 \Rightarrow$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{|A - 2I|} \cdot [\text{adj}(A - 2I)^t] \Rightarrow (A - 2I)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{adj}(A - 2I)^t] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (A - 2I)^t$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado los puntos **A** (1 , -3 , 0) , **B** (3 , 1 , - 2) , **C** (7 , 2 , 3) , **D** (5 , - 2 , 5) , **E** (1 , 0 , 2) se pide:

- a) (1 punto). Demostrar que los puntos **A** , **B** , **C** y **D** son coplanarios
 b) (1 punto). Demostrar que el polígono **ABCD** es un paralelogramo y calcular su área
 c) (1 punto). Hallar la distancia del punto **E** al plano π determinado por los puntos **A** , **B** , **C** y **D**

a)

Hallaremos el plano π que pasa por los puntos **A**, **B** y **C**, determinado por los vectores **AB**, **AC** y **AG** siendo el determinante formado por ellos nulo, y la ecuación del plano pedida. Después veremos si el punto **D** pertenece al plano

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, 1, -2) - (1, -3, 0) = (2, 4, -2) \equiv (1, 2, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (7, 2, 3) - (1, -3, 0) = (6, 5, 3) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (1, -3, 0) = (x-1, y+3, z) \end{array} \right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \\ x-1 & y+3 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$5z + 6 \cdot (x-1) - 6 \cdot (y+3) + 5 \cdot (x-1) - 3 \cdot (y+3) - 12z = 0 \Rightarrow 11 \cdot (x-1) - 9 \cdot (y+3) - 7z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 11x - 9y - 7z - 38 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Veamos si } D \text{ pertenece al plano} \Rightarrow 11 \cdot 5 - 9 \cdot (-2) - 7 \cdot 5 - 38 = 0 \Rightarrow 55 + 18 - 35 - 38 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

El punto D pertenece al plano π , por lo tanto A, B, C y D son coplanarios

b) Veremos si son paralelos los vectores **AB** y **CD**, asimismo y, para ser paralelogramo lo serán, también, **BC** y **AD**

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, 1, -2) - (1, -3, 0) = (2, 4, -2) \\ \overrightarrow{CD} = (5, -2, 5) - (7, 2, 3) = (-2, -4, 2) \equiv (2, 4, -2) \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (7, 2, 3) - (3, 1, -2) = (4, 1, 5) \\ \overrightarrow{AD} = (5, -2, 5) - (1, -3, 0) = (4, 1, 5) \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC} \Rightarrow$$

Es un paralelogramo

c)

$$d(E, \pi) = \frac{|11 \cdot 1 - 9 \cdot 0 - 7 \cdot 2 - 38|}{\sqrt{11^2 + 9^2 + 7^2}} = \frac{|11 - 14 - 38|}{\sqrt{121 + 81 + 49}} = \frac{|-41|}{\sqrt{251}} = \frac{41 \cdot \sqrt{251}}{251} u$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{x}$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{\frac{1}{0}} = 0 \cdot e^{\infty} = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-1) \frac{1}{x^2}}{(-1) \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{x} &= \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} 0} - \sqrt{1-\operatorname{tg} 0}}{0} = \frac{\sqrt{1+0} - \sqrt{1-0}}{0} = \frac{0}{0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}) \cdot (\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1-\operatorname{tg} x})}{x \cdot (\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1-\operatorname{tg} x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\operatorname{tg} x - (1-\operatorname{tg} x)}{x \cdot (\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1-\operatorname{tg} x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\operatorname{tg} x - 1 + \operatorname{tg} x}{x \cdot (\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1-\operatorname{tg} x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{tg} x}{x \cdot (\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1-\operatorname{tg} x})} = \frac{2\operatorname{tg} 0}{0 \cdot (\sqrt{1+\operatorname{tg} 0} + \sqrt{1-\operatorname{tg} 0})} = \frac{0}{0} = \\ &= \frac{2}{\cos^2 x} \stackrel{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1-\operatorname{tg} x} \right) + \left(\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1+\operatorname{tg} x}} + \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1-\operatorname{tg} x}} \right) \cdot x} = \\ &= \frac{2}{\cos^2 0} = \frac{2}{1} = \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} 0} + \sqrt{1-\operatorname{tg} 0} \right) + \left(\frac{\frac{1}{\cos^2 0}}{2\sqrt{1+\operatorname{tg} 0}} + \frac{-\frac{1}{\cos^2 0}}{2\sqrt{1-\operatorname{tg} 0}} \right) \cdot 0} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0} \right) + \left(\frac{\frac{1}{1}}{2\sqrt{1+0}} + \frac{-\frac{1}{1}}{2\sqrt{1-0}} \right) \cdot 0} = \\ &= \frac{2}{(1+1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \cdot 0} = \frac{2}{2+0 \cdot 0} = 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada función $f(x) = \frac{1}{2} - \text{sen } x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la

gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Signos función} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12} \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \text{sen } \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} - 0,25881904510252.. > 0 \\ \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} - \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \text{sen } x\right) dx + \left| \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \text{sen } x\right) dx \right| = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \text{sen } x\right) dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \text{sen } x\right) dx =$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot [x]_0^{\frac{\pi}{6}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2} \cdot [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - [\cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{6} - 0\right) + \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos 0\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$A = \frac{\pi}{12} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{6\pi - 2\pi}{12} - \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3} - 2}{2} - \frac{4\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3} - 2}{2}$$

$$A = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{2} - \frac{\pi}{12} = \left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}\right) u^2 = 0,99385019536802673006599995677916 u^2$$