

OPCIÓN A

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ 1-x & \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ donde \ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f y calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 b) (0'5 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$.
 c) (1'5 puntos) Calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx$

a)

$$1-x=0 \Rightarrow x=1 \notin (-\infty, 0)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{\ln(1-0)}{1-0} = \frac{\ln 1}{1} = 0 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \cdot e^{-0} = 0 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Es continua en } \forall x \in \mathfrak{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b)

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} y = f(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \\ y' = f'(2) = (1-2)e^{-2} = \frac{-1}{e^2} \end{cases} \Rightarrow y - \frac{2}{e^2} = \frac{-1}{e^2} \cdot (x-2)$$

c)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{1-x} dx + \int_0^1 xe^{-x} dx = \int_2^1 \frac{\ln t}{t} (-dt) + [x(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx =$$

$$1-x=t \Rightarrow -dx=dt \Rightarrow dx=-dt \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=-1 \Rightarrow t=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=u \Rightarrow dx=du \\ e^{-x} dx = dv \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{cases}$$

$$-\int_2^1 \frac{\ln t}{t} dt - [x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\int_{\ln 2}^0 v dv - (1 \cdot e^{-1} - 0 \cdot e^{-0}) - [e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{2} \cdot [v^2]_{\ln 2}^0 - \left(\frac{1}{e} - 0\right) - \left(\frac{1}{e} - e^{-0}\right)$$

$$\ln t = v \Rightarrow \frac{dt}{t} = dv \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow v = \ln 2 \\ t=1 \Rightarrow v = \ln 1 = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot (0^2 - \ln^2 2) - \frac{2}{e} + 1 = \frac{1}{2} \ln^2 2 - \frac{e-2}{e} = \frac{2}{2} \ln 2 - \frac{e-2}{e} = \ln 2 - \frac{e-2}{e}$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1.5 puntos) Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Expresé X de la forma más simple posible.

b) (1.5 puntos) Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que

$$YB = A.$$

a)

$$X(CD)^{-1} - X(D^{-1}C^{-1} - B) = A \Rightarrow X(C^{-1}D^{-1} - C^{-1}D^{-1} + B) = A \Rightarrow XB = A \Rightarrow XBB^{-1} = AB^{-1} \Rightarrow XI = AB^{-1} \Rightarrow X = AB^{-1}$$

b)

$$YB = A \Rightarrow YBB^{-1} = AB^{-1} \Rightarrow YI = AB^{-1} \Rightarrow Y = AB^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{adj } B^t \Rightarrow$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } B^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro **a**, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) **(0.5 puntos)** Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) **(0.5 puntos)** Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) **(1 punto)** Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

a) Si dos planos son paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (a, 1, -1) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (1, a, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{-1}{1} \Rightarrow a = -1 \\ \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

b) Si dos planos son perpendiculares sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (a, 1, -1) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (1, a, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{\pi_1} \perp \vec{v}_{\pi_2} \Rightarrow \vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2} = 0 \Rightarrow (a, 1, -1) \cdot (1, a, 1) = 0 \Rightarrow a + a - 1 = 0 \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

c) El vector director de la recta es igual o proporcional al del plano

El vector director de la recta, formado por los planos, es el producto vectorial de sus vectores directores.

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (a, 1, -1) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (1, a, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{\pi_1} \wedge \vec{v}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + a^2 \vec{k} - \vec{k} + a\vec{i} - a\vec{j} = (1+a)\vec{i} - (1+a)\vec{j} + (a^2-1)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = [(1+a), -(1+a), (a^2-1)] \\ \vec{v}_\pi = (1, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1+a}{1} = \frac{-(1+a)}{-1} = \frac{a^2-1}{0} \Rightarrow \left\{ \frac{1+a}{1} = \frac{a^2-1}{0} \Rightarrow \right.$$

$$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el punto $\mathbf{P}(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de \mathbf{P} respecto al plano que pasa por los puntos $\mathbf{A}(0, 2, -1)$, $\mathbf{B}(1, -3, 0)$ y $\mathbf{C}(2, 1, 1)$.

Para determinar el plano π debemos de halla los vectores \mathbf{AB} , \mathbf{AC} y \mathbf{AG} , siendo \mathbf{G} el punto generador del plano, como los tres son coplanarios y este último es combinación lineal de los otros dos, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.

Determinado el plano hallaremos una recta r que pase por \mathbf{P} y sea perpendicular al plano, siendo su vector director el del plano, calcularemos el punto \mathbf{Q} que es la intersección del plano y la recta r y que es el punto medio entre \mathbf{P} y su simétrico \mathbf{P}'

$$\begin{cases} \overline{AB} = (1, -3, 0) - (0, 2, -1) = (1, -5, 1) \\ \overline{AC} = (2, 1, 1) - (0, 2, -1) = (2, -1, 2) \\ \overline{AG} = (x, y, z) - (0, 2, -1) = (x, y-2, z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-10x + 2(y-2) - (z+1) + 10(z+1) + x - 2(y-2) = 0 \Rightarrow -9x + 9(z+1) = 0 \Rightarrow 9x - 9z - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - z - 1 = 0$$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, 0, -1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow (2 + \lambda) - (-1 - \lambda) - 1 = 0 \Rightarrow 2 + \lambda + 1 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 2 + (-1) \\ y = 1 \\ z = -1 - (-1) \end{cases} \Rightarrow Q(1, 1, 0) \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 2 + x_{P'} = 2 \Rightarrow x_{P'} = 0 \\ 1 = \frac{1 + y_{P'}}{2} \Rightarrow 1 + y_{P'} = 2 \Rightarrow y_{P'} = 1 \\ 0 = \frac{-1 + z_{P'}}{2} \Rightarrow -1 + z_{P'} = 0 \Rightarrow z_{P'} = 1 \end{cases}$$

$$P'(0, 1, 1)$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z = 4 \end{cases} \quad \text{se pide:}$$

- a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m .
 b) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 0$.
 c) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 2$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m+1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & m-6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & m+6 & -8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & m-6 \\ m+6 & -8 \end{vmatrix} = -[-32 - (m+6)(m-6)]$$

$$|A| = -[-32 - (m^2 - 36)] = -(-32 - m^2 + 36) = -(-m^2 + 4) \Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $m = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

Si $m = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 8 & 0 & 8 & -2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número incógnitas}$$

Sistema Compatible Indeterminado

b)

Si $m = 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow -8 + 2z = -1 \Rightarrow 2z = 7 \Rightarrow$$

$$z = \frac{7}{2} \Rightarrow -2 - y + \frac{14}{2} = -2 \Rightarrow y = \frac{14}{2} = 7 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(-2, 7, \frac{7}{2} \right)$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción B

c)

Si $m = 2 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 4x + 4z = -1 \Rightarrow 4x = -1 - 4z \Rightarrow x = -\frac{1}{4} - z \Rightarrow -\frac{1}{4} - z - y + 2z = -2 \Rightarrow$$

$$y = 2 - \frac{1}{4} + z \Rightarrow y = \frac{7}{4} + z \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{1}{4} - \lambda, \frac{7}{4} + \lambda, \lambda \right)$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:

- a) (1 punto) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono **ABCD** es un paralelogramo.
 b) (1 punto) Calcular el área de dicho paralelogramo.
 c) (1 punto) Determinar el lugar geométrico de los puntos **P** cuya proyección sobre el plano **ABCD** es el punto medio del paralelogramo.

a) El producto mixto de los vectores **AB**, **AC** y **AD**, que es el volumen del paralelogramo que determinan debe de ser nulo, ya que son coplanarios.

Después estudiaremos que puntos determinan vectores que son paralelos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 6, 4) - (0, 5, 3) = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 4, 2) - (0, 5, 3) = (2, -1, -1) \\ \overrightarrow{AD} = (2, 3, 1) - (0, 5, 3) = (2, -2, -2) = (1, -1, -1) \end{array} \right. \Rightarrow V = \left| (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$V = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Dos filas iguales} \Rightarrow V = 0 \Rightarrow \text{Son coplanarios}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (2, 4, 2) - (0, 6, 4) = (2, -2, -2) \equiv (1, -1, -1) \\ \overrightarrow{CD} = (2, 3, 1) - (2, 4, 2) = (0, -1, -1) = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AD} = (1, -1, -1) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| \\ |\overrightarrow{BC}| \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{CD}| \\ |\overrightarrow{AD}| \end{array} \right. \Rightarrow \text{Es un paralelogramo}$$

b) El área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de **AB** y **AC**

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 6, 4) - (0, 5, 3) = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 4, 2) - (0, 5, 3) = (2, -1, -1) \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{i} = 2\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$A = \left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} u^2$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción B

c) Sera una recta perpendicular al plano, cuyo vector director se halla como el producto vectorial de los vectores AB y AC y que pase por el punto P punto medio de AC por ejemplo (o BD)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -1, -1) \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_\pi = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{j} - 2\vec{k} = (0, 2, -2) \equiv (0, 1, -1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_P = \frac{0+2}{2} = 1 \\ y_P = \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2} \\ z_P = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \end{array} \right. \Rightarrow P\left(1, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{9}{2} + \lambda \\ z = \frac{5}{2} - \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in \mathfrak{R}$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.

b) (1 punto) Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in \mathfrak{R}$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x) dx = 5 \quad , \quad \int_0^2 g(x) dx = 14$$

a)

$$f'''(x) = \int 12 dx = 12x + C \Rightarrow f''(1) = 4 \Rightarrow 12 \cdot 1 + C = 4 \Rightarrow C = -8 \Rightarrow f''(x) = 12x - 8$$

$$f'(x) = \int (12x - 8) dx = \frac{1}{2} \cdot 12x^2 - 8x + K \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow 6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + K = 1 \Rightarrow K = 3 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 8x + 3$$

$$f(x) = \int (6x^2 - 8x + 3) dx = \frac{1}{3} \cdot 6x^3 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x^2 + 3x + Q \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + Q = 3 \Rightarrow Q = 2$$

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

b)

$$g'(x) = \int 6 dx = 6x + C \Rightarrow g(x) = \int (6x + C) dx = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x^2 + Cx + K = 3x^2 + Cx + K$$

$$\int_0^1 (3x^2 + Cx + K) dx = \left[\frac{1}{3} \cdot 3x^3 + \frac{1}{2} \cdot Cx^2 + Kx \right]_0^1 = \left(1^3 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot 1^2 + K \cdot 1 \right) - \left(0^3 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot 0^2 + K \cdot 0 \right) = 1 + \frac{C}{2} + K$$

$$\int_0^2 (3x^2 + Cx + K) dx = \left[\frac{1}{3} \cdot 3x^3 + \frac{1}{2} \cdot Cx^2 + Kx \right]_0^2 = \left(2^3 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot 2^2 + K \cdot 2 \right) - \left(0^3 + \frac{1}{2} \cdot C \cdot 0^2 + K \cdot 0 \right) = 8 + 2C + 2K$$

$$\int_0^1 g(x) dx = 5 \Rightarrow 1 + \frac{C}{2} + K = 5 \Rightarrow 2 + C + 2K = 10 \Rightarrow C + 2K = 8$$

$$\Rightarrow K = 5 \Rightarrow C + 5 = 3 \Rightarrow C = -2 \Rightarrow$$

$$\int_0^2 g(x) dx = 14 \Rightarrow 8 + 2C + 2K = 14 \Rightarrow 2C + 2K = 6 \Rightarrow C + K = 3$$

$$g(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ |x \ln x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$, donde \ln denota el logaritmo neperiano.

$$|x \ln x| > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \Rightarrow x > e^0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -x \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -x \ln x = -0 \cdot (-\infty) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{-\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{-\infty} = -\frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -\ln x + \frac{1}{x} \cdot (-x) & \text{si } x < 1 \\ -(\ln x + 1) & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -(\ln x + 1) & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -(\ln x + 1) = -(-\infty) = \infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -x \ln x = -1 \cdot \ln 1 = 0 \\ f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \cdot \ln 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} -(\ln x + 1) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -(\ln 1 + 1) = -(0 + 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 1$$