OPCIÓN A

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 2,5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+my=1 \\ -2x-(m+1)y+z=-1 \\ x+(2m-1)y+(m+2)z=2+2m \end{cases}$, se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro **m**.
b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para **m = 0**.

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -m-1 & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & m-1 & m+2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ m-1 & m+2 \end{vmatrix}=(m-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m+2 \end{vmatrix}=(m-1)\cdot(m+2-1)=(m-1)\cdot(m+1)$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow(m-1)\cdot(m+1)=0\Rightarrow\begin{cases} m-1=0\Rightarrow m=1 \\ m+1=0\Rightarrow m=-1 \end{cases}$$

$\forall m\in\Re-\{-1,1\}\Rightarrow rang\,(\mathrm{A})=3=$ Número de incognitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

Si m = –1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\Rightarrow rang\,(A)=2\neq rang\,(A/B)=3$$

Sistema Incompatible

Si m = 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow \mathrm{rang}\,(\mathrm{A})=\mathrm{rang}\,(\mathrm{A/B})=2\Rightarrow$$ Sistema Compatible Indeterminado

b)

Si $m=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)\Rightarrow x=1\Rightarrow 5\cdot1+y=4\Rightarrow y=-1\Rightarrow -2\cdot1-1\cdot(-1)+z=-1\Rightarrow z=0\Rightarrow$$

Solución $\Rightarrow(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=(1,-1,0)$

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

a) (1,5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: m_1 = 0,92, m_2 = 0,94, m_3 = 0,89, m_4 = 0,90, m_5 = 0,91.
Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)2 + \dots + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo.
Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2\ln(x)\,dx$, donde ln significa logaritmo neperiano.

$$a)\mathrm{E}(x)=(x-0{,}92)^2+(x-0{,}94)^2+(x-0{,}89)^2+(x-0{,}90)^2+(x-0{,}91)^2\Rightarrow$$

$$\mathrm{E}'(x)=\frac{d\mathrm{E}(x)}{dx}=2\cdot(x-0{,}92)+2\cdot(x-0{,}94)+2\cdot(x-0{,}89)+2\cdot(x-0{,}90)+2\cdot(x-0{,}91)\Rightarrow$$

$$\mathrm{E}'(x)=\frac{d\mathrm{E}(x)}{dx}=2x-1{,}84+2x-1{,}88+2x-1{,}78+2x-1{,}80+2x-1{,}82\text{Þ}\mathrm{E}'(x)=10x-9{,}12$$

$$\mathrm{Si}\ \mathrm{E}'(x)=0\Rightarrow 10x-9{,}12=0\Rightarrow 10x=9{,}12\Rightarrow x=\frac{9{,}12}{10}=0{,}912$$

$$\mathrm{E}''(x)=\frac{d\mathrm{E}'(x)}{dx}=10>0\Rightarrow \text{Solución mínima}\Rightarrow x=0{,}912$$

Continuación del Ejercicio 2 de la Opción A

b)

$$\int x^2 \ln(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(x) - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3}\cdot\left[\ln(x) - \frac{1}{3}\right] + K$$

$$\begin{cases} u = \ln(x) \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ x^2 dx = dv \Rightarrow v = \int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\cdot\left\{\ln(x) - \frac{1}{3}\right\}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3}\cdot\left[\ln(2) - \frac{1}{3}\right] - \frac{1^3}{3}\cdot\left[\ln 1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{8}{3}\cdot\left[\ln(2) - \frac{1}{3}\right] - \frac{1}{3}\cdot\left[\ln(1) - \frac{1}{3}\right]$$

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)\,dx = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{8}{9} - \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}$$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$; $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) (1.5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos **ABCD**, con **A(2 ,1 , 3)** y **B(1 , 2 , 3)**, calcular los vértices **C** y **D**, sabiendo que **C** pertenece a los planos π_2 *y* $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

a) El lado del cubo **L** es la distancia entre los dos planos, que deben de ser paralelos (analizaremos si lo son, hallando si sus vectores directores son iguales o proporcionales)**,** siendo su volumen el lado elevado al cubo.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (4, 6, -12) \equiv (2, 3, -6) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (2, 3, -6) \equiv (2, 3, -6) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} = \overrightarrow{v_{\pi_2}} \Rightarrow \pi_1 \; y \; \pi_2 \; son \; paralelos \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv 4x + 6y - 12z + 10 = 0 \end{cases}$$

$$L = d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|1 - 10|}{\sqrt{4^2 + 6^2 + (-12)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{16 + 36 + 144}} = \frac{9}{\sqrt{196}} = \frac{9}{14}\,u \Rightarrow V = L^3 = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744}\,u^3$$

b) El punto **C** pertenece a la recta r determinada por los planos π_2 *y* π_3 , siendo el vector **BC** perpendicular al vector **AB** y el producto escalar, de ambos, es nulo

$$\begin{cases} \pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \\ \pi_3 \equiv 2x - 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow -5y + 8z - 9 = 0 \Rightarrow 5y = 8z - 9 \Rightarrow y = \frac{8}{5}z - \frac{9}{5} \Rightarrow x - \left(\frac{8}{5}z - \frac{9}{5}\right) + z - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{8}{5}z - \frac{9}{5} - z + 2 \Rightarrow x = \frac{3}{5}z + \frac{1}{5} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 1\right) \equiv (3, 8, 5) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} + 3\lambda \\ y = -\dfrac{9}{5} + 8\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 2, 3) - (2, 1, 3) = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{1}{5} + 3\lambda, -\dfrac{9}{5} + 8\lambda, 5\lambda\right) - (1, 2, 3) = \left(-\dfrac{4}{5} + 3\lambda, -\dfrac{19}{5} + 8\lambda, -3 + 5\lambda\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$$

$$(-1, 1, 0)\cdot\left(-\frac{4}{5} + 3\lambda, -\frac{19}{5} + 8\lambda, -3 + 5\lambda\right) = 0 \Rightarrow \frac{4}{5} - 3\lambda - \frac{19}{5} + 8\lambda = 0 \Rightarrow -\frac{15}{5} + 5\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = 3 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{3}{5} \Rightarrow C \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} + 3\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{10}{5} = 2 \\ y = -\dfrac{9}{5} + 8\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{15}{5} = 3 \Rightarrow C(2, 3, 3) \\ z = 5\cdot\dfrac{3}{5} = 3 \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 3 de la Opción A

El punto medio **P** de la diagonal **AC**, es el mismo que el de la diagonal **BD**

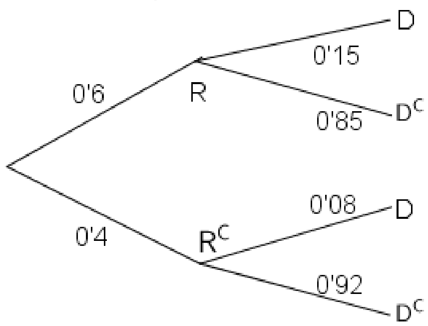
$$\begin{cases} x_P = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2+2}{2} = 2 \\ y_P = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ z_P = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{3+3}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow P(2\,,2\,,3) \Rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{1+x_D}{2} \Rightarrow 1 + x_D = 4 \Rightarrow x_D = 3 \\ 2 = \dfrac{2+y_D}{2} \Rightarrow 2 + y_D = 4 \Rightarrow y_D = 2 \Rightarrow D(3\,,2\,,2) \\ 3 = \dfrac{3+z_D}{2} \Rightarrow 6 + z_D = 4 \Rightarrow z_D = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.
El 60% de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15% de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8% si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.
a) (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.
b) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

a) Llamemos R, R^C, D y D^C, a los sucesos siguientes, "artículos con precios rebajados", "artículos con precios sin rebajar", "artículos devueltos" y "artículos sin devolver", respectivamente.

Datos del problema: p(R) = 60% = 0'6; p(D/R) = 15% = 0'15 ; p(D/R^C) = 8% = 0'08, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:
Me piden **p(D) =** p(R).p(D/R) + p(R^C).p(D/R^C) = (0'6)·(0'15) + (0'4)·(0'08) **= 61/500 = 0'122 = 12'2%, es decir el porcentaje global de artículos devueltos es del 12'2%**
b)
¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Me piden **p(R/D)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(R/D) = $\dfrac{p(R \cap D)}{p(D)} = \dfrac{p(R)\cdot p(D/R)}{p(D)} = \dfrac{(0'6)\cdot(0'15)}{0'122}$ **= 45/61 ≅ 0'7377 = 73'77%, es decir el 73'77% de los artículos adquiridos con precios rebajados fueron devueltos.**

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 2,5 puntos.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro **m** para los que la matriz **A** admite inversa.
b) (1 punto) Para **m = 0**, calcular **A . B** y **A^{-1} . B**.
c) (0.5 puntos) Calcular **B . B^t** y **B^t . B**, donde **B^t** denota la matriz traspuesta de **B**.

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m+4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} m & 2 \\ -2 & m+4 \end{vmatrix}=-\left[m\cdot(m+4)+4\right]=-\left(m^2+4m+4\right)\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow -m^2-4m-4\Rightarrow m^2+4m+4=0\Rightarrow \Delta=4^2-4\cdot 1\cdot 4=0\Rightarrow m=\frac{-4\pm\sqrt{0}}{2}=-2\Rightarrow$$

$$\forall m\in\Re-\{-2\}\Rightarrow |A|=0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

b)

$$Para\ m=0\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=+(2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=(2)\cdot(-2)=-4\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t\Rightarrow$$

$$A^t=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\qquad A^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B\cdot B^t=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\qquad B^t\cdot B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=(4)$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 2,5 puntos.

Dada las funciones $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$

a) (0.5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de **f(x).**
b) (0.75 puntos) Calcular **f'(4).**
c) (1.25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la curva **y = f(x)**, el eje **OX** y las rectas **x = -1** y **x = 1**

$a)$

$$x>0 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & si \quad x<0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & si \quad x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-(-x)}{\sqrt{(-x)^2+9}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{\infty^2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1 \Rightarrow Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=1,\ cuando\ x\to-\infty$$

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{\infty^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1\Rightarrow$$

$$Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=1,\ cuando\ x\to\infty$$

$b)$

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{x^2+9}-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+9}}x}{x^2+9}=-\dfrac{x^2+9-2x^2}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} & si \quad x<0 \\ \dfrac{9-x^2}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(4)=\frac{9-4^2}{(4^2+9)\sqrt{4^2+9}}=-\frac{7}{25\cdot 5}=-\frac{7}{125}$$

Continuación del Ejercicio 2 de la Opción B

c)

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0=\begin{cases} 0=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow -x=0 \Rightarrow x=0 \\ 0=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+9}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+9}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{37}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{37}}{2}}=\frac{\sqrt{37}}{37}>0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+9}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+9}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{37}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{37}}{2}}=\frac{\sqrt{37}}{37}>0$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=\int\frac{t}{t}\,dt=t=\sqrt{x^2+9}+K$$

$$x^2+9=t^2 \Rightarrow 2x\,dx=2t\,dt \Rightarrow x\,dx=t\,dt$$

$$A=\int_{-1}^{0}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=-\left[\sqrt{x^2+9}\right]_{-1}^{0}+\left[\sqrt{x^2+9}\right]_{0}^{1}$$

$$=-\left(\sqrt{0^2+9}-\sqrt{(-1)^2+9}\right)+\left(\sqrt{1^2+9}-\sqrt{0^2+9}\right)=-\left(3-\sqrt{10}\right)+\left(\sqrt{10}-3\right)=2\sqrt{10}-6=2\left(\sqrt{10}-3\right)\ u^2$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2,5 puntos.

Dados el punto **P(1 , 1 , 1)** y las rectas $r\equiv\begin{cases}2x+y=2\\5x+z=6\end{cases}$, $s\equiv\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{\frac{1}{3}}$, se pide

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto **P** a la recta **r**.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas **r** y **s**.
c) (0.5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta **s** y que pasa por el punto **P**.

a) Hallaremos un plano α que contenga el punto **P** y sea perpendicular a la recta **r**, por ello tendrá como vector director el de dicha recta que es perpendicular al vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano y el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación buscada del plano.
Hallaremos el punto de corte **Q** del plano hallado con la recta **r**; el módulo del vector **PQ** es la distancia buscada.

$$\begin{cases}y=2-2x\\z=6-5x\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=2-2\lambda\\z=6-5\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_\alpha}=\overrightarrow{v_r}=(1,-2,-5)\\\overrightarrow{PG}=(x,y,z)-(1,1,1)=(x-1,y-1,z-1)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_\alpha}\cdot\overrightarrow{PG}=0\Rightarrow$$

$$(1,-2,-5)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0\Rightarrow x-1-2y+2-5z+5=0\Rightarrow\alpha\equiv x-2y-5z+6=0\Rightarrow$$

$$Punto\ de\ corte\Rightarrow\lambda-2\cdot(2-\lambda)-5\cdot(6-5\lambda)+6=0\Rightarrow\lambda-4+2\lambda-30+25\lambda+6=0\Rightarrow28\lambda-28=0\Rightarrow$$

$$28\lambda=28\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow Q\begin{cases}x=1\\y=2-2\cdot1\\z=6-5\cdot1\end{cases}\Rightarrow Q(1,0,1)\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=(1,0,1)-(1,1,1)=(0,-1,0)\Rightarrow$$

$$d(P,r)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{0^2+(-1)^2+0^2}=1\,u$$

Continuación del Ejercicio 3 de la Opción B

b) Estudiaremos la posición relativa de las rectas. Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula y hay algún valor de la matriz de los coeficientes, de grado 2, no nula, el sistema es Compatible Determinado y las rectas son secantes y se cortan en un punto, de no haber ningún determinante de la matriz de los coeficientes de orden 2, el sistema es Compatible Indeterminado y la rectas se confunden.
Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, si los vectores directores de la rectas son iguales o proporcionales, las rectas son paralelas, de no ser así se cruzarán.

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=6-5\lambda \end{cases} \\ \overrightarrow{v_s}=\left(-1\,,1\,,\dfrac{1}{3}\right)\equiv(-3\,,3\,,1)\Rightarrow s\equiv\begin{cases} x=2-3\mu \\ y=-1+3\mu \\ z=1+\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2-3\mu \\ 2-2\lambda=-1+3\mu \\ 6-5\lambda=1+\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda+3\mu=2 \\ 2\lambda+3\mu=3 \\ 5\lambda+\mu=5 \end{cases} \Rightarrow |A/B|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A/B|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -14 & -5 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -14 & -5 \end{vmatrix}=15-14=1\neq 0\Rightarrow \textit{Son paralelas o se cruzan en el espacio}\Rightarrow$$

$$\textit{Como}\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\,,-2\,,-5) \\ \overrightarrow{v_s}=(-3\,,3\,,1) \end{cases}\Rightarrow \frac{1}{-3}\neq\frac{-2}{3}\Rightarrow \textit{No son paralelas}\Rightarrow r \textit{ y } s \textit{ se cruzan en el espacio}$$

c) Hallaremos un plano π que contenga el punto **P** y sea perpendicular a la recta **s**, por ello tendrá como vector director el de dicha recta que es perpendicular al vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano y el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación buscada del plano.

$$s\equiv\begin{cases} x=2-3\mu \\ y=-1+3\mu \\ z=1+\mu \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_s}=(-3\,,3\,,1) \\ \overrightarrow{PG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,1\,,1)=(x-1\,,\,y-1\,,\,z-1) \end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{PG}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{PG}=0\Rightarrow$$

$$(-3\,,3\,,1)\cdot(x-1\,,\,y-1\,,\,z-1)=0\Rightarrow -3x+3+3y-3+z-1=0\Rightarrow \pi\equiv 3x-3y-z-1=0$$

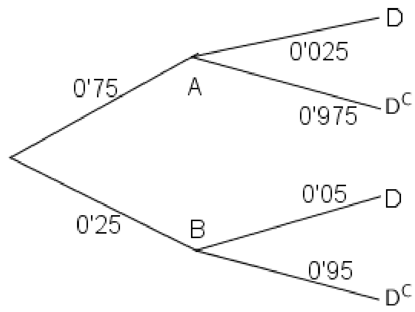
Ejercicio 4: Calificación máxima: 2,5 puntos.

En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75% de los productos fabricados son de tipo A y el 25% de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2,5% de las veces.
a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?
b) (1.5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

a) Llamemos A, B, D y D^C, a los sucesos siguientes, “producto del tipo A”, "producto del tipo B", "producto defectuoso" y "producto no defectuoso", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 75% = 0’753; p(B) = 25% = 0’25; p(D/A) = 2’5% = 0’025 ; p(D/B) = 5% = 0’05, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:
p(D) = p(A).p(D/A) + p(B).p(D/B) = (0'75)·(0'025) + (0'25)·(0'05) **= 1/32 = 0'03125**.

De los 5000 productos fabricados en un mes, serán defectuosos "n·p(D)" = 5000·0'03125 = 156'25, es decir unos 156 productos serán defectuosos.
b)
Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

Recordamos que si realizamos **n** veces (6000) un experimento en el que podemos obtener éxito, A, con probabilidad **p** (p(D/A) = 0'025) y fracaso, A^C, con probabilidad **q** (q = 1 – p = 1 – 0'025 = 0'975), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n;p)**.

Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(6000; 0'025)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (6000\ sobre\ k).0'025^{k}\cdot 0'975^{(600-k)} = \binom{n}{k}.0'025^{k}\cdot 0'975^{(6000-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n-k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

También sabemos que bajo determinadas condiciones, **la distribución binomial B(n,p) se puede aproximar mediante la distribución normal N(np,√(npq)).**
Es decir: **Si X, variable aleatoria discreta, sigue una B(n,p), verificando np y np ≥ 5 (n grande y p próximo a 0'5) entonces la variable X se puede aproximar por una nueva variable X' continua que sigue una normal N(np, √(npq)). Esta nueva variable X', después por tipificación** $Z = \dfrac{X' - np}{\sqrt{npq}}$ **seguirá una normal N(0;1)**

Recordemos que la distribución **binomia**l es de variable aleatoria **discreta X** y, por tanto, tiene sentido calcular probabilidades puntuales; por ejemplo, p(X = 2). En cambio, la variable aleatoria **continua X'** sigue una distribución **normal** y, por tanto, no tiene sentido calcular probabilidades puntuales, pues son todas nulas; en este caso p(X' = 2) = 0.
Para resolver este problema se introducen unas correcciones (correcciones de Yates), que consiste en considerar los valores de la variable aleatoria discreta X como marcas de clase de intervalos del siguiente modo:

X sigue una B(n,p) y X' sigue una N(np,√(npq)).
p(X = a) = p(a – 0'5 < X' ≤ a + 0'5)
p(X ≤ a) = p(X' ≤ a - 0'5)
p(X < a) = p(X' < a - 0,5)

En nuestro caso X sigue una B(n,p) = B(6000; 0'025) y X' sigue una N(np,√(npq) =
= N(6000·0'025; √(6000·0'025·0'975)) = N(150; 12'1).

Me piden p(X > 160) = {contrario} = 1 – p(X ≤ 160) = {corrección de Yates} = 1 – p(X' ≤ 159'5) = {tipifico} = = 1 – p(Z ≤ (159'5 – 150)/12'1) = 1 – p(Z ≤ 0'785) = {Miro la tabla} = 1- (0'7823+0'7852)/2 = {he tomado la mitad entre 0'78 y 0'79} = 1 – 0'78875 **= 0'21125.**