Estudiar la concavidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ y localizar sus puntos de inflexión.

Solución

En primer lugar calcularemos las derivadas de primer y segundo orden de la función:

$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x}{(1+x)^2}.$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+2)(1+x)^2 - (x^2+2x)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} \\ &= \frac{(2x+2)(1+x) - (x^2+2x)\cdot 2}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}. \end{aligned}$$

Para estudiar el signo de la segunda derivada, observamos que el numerador nunca se anula. En cambio, el denominador se anula en el punto de abscisa $x = -1$, que es precisamente el punto que no está en el dominio. Para estudiar el signo en los intervalos que este punto determina, construimos el siguiente diagrama de signos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
$f''(x)$	$--$	$++$

Al calcular $f''(x)$ en un punto del intervalo $(-\infty,-1)$ resultó un valor negativo y al sustituir en la función un punto del intervalo $(-1,\infty)$ dió un valor positivo. Eso quiere decir que:

f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1,\infty)$;
f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty,-1)$.

Sin embargo no hay punto de inflexión pues el punto $x = -1$, en donde cambia la concavidad, no está en el dominio.

Estudiar la concavidad de la función $f(x) = 2 - |x^5 - 1|$ y localizar sus puntos de inflexión.

Solución

Debemos descomponer en primer lugar la función para eliminar el valor absoluto.

Como $x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ y el segundo factor es siempre positivo, resulta que

$$f(x) = \begin{cases} 2-(x^5-1) & \text{si } x \ge 1 \\ 2+(x^5-1) & \text{si } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 3-x^5 & \text{si } x \ge 1, \\ 1+x^5 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Debemos separar el estudio de la concavidad para cada uno de los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$.

* En $(-\infty, 1)$: $f'(x) = 5x^4$ (siempre positiva; la función es creciente en ese intervalo).

$f''(x) = 20x^3$. Realizamos el estudio de los signos como en los ejemplos anteriores:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$
$f''(x)$	$--$	$++$

* En $(1, \infty)$: $f'(x) = -5x^4$ (siempre negativa; la función es decreciente en ese intervalo).

$f''(x) = -20x^3$. En este intervalo x es siempre positiva; de este modo $f''(x)$ es negativa.

En definitiva llegamos al siguiente resultado:

f es cóncava hacia arriba en $(0, 1)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y en $(1, \infty)$.

Los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ son de inflexión pues cambia la concavidad. Al sustituir dichos valores en la función se obtienen los puntos $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

Estudiar la concavidad y convexidad de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Solución

Para esta función,

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2};\ f''(x) = \frac{(1 + x^2)^2(-2) + 2x \cdot [2(1 + x^2) \cdot 2x]}{(1 + x^2)^4} = \frac{2(3x^2 - 1)}{(1 + x^2)^3}.$$

Observamos que el denominador de f'' es siempre positivo y el numerador se anula cuando $x = \pm\sqrt{1/3}$, con lo que tenemos la siguiente tabla de signos:

	$x < -\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/3} < x < \sqrt{1/3}$	$x > \sqrt{1/3}$
$3x^2 - 1$	$++$	$--$	$++$
$f''(x)$	$++$	$--$	$++$

De aquí deducimos que f es convexa en $(-\infty, -\sqrt{1/3})$ y $(\sqrt{1/3}, \infty)$, mientras que es cóncava en $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$.