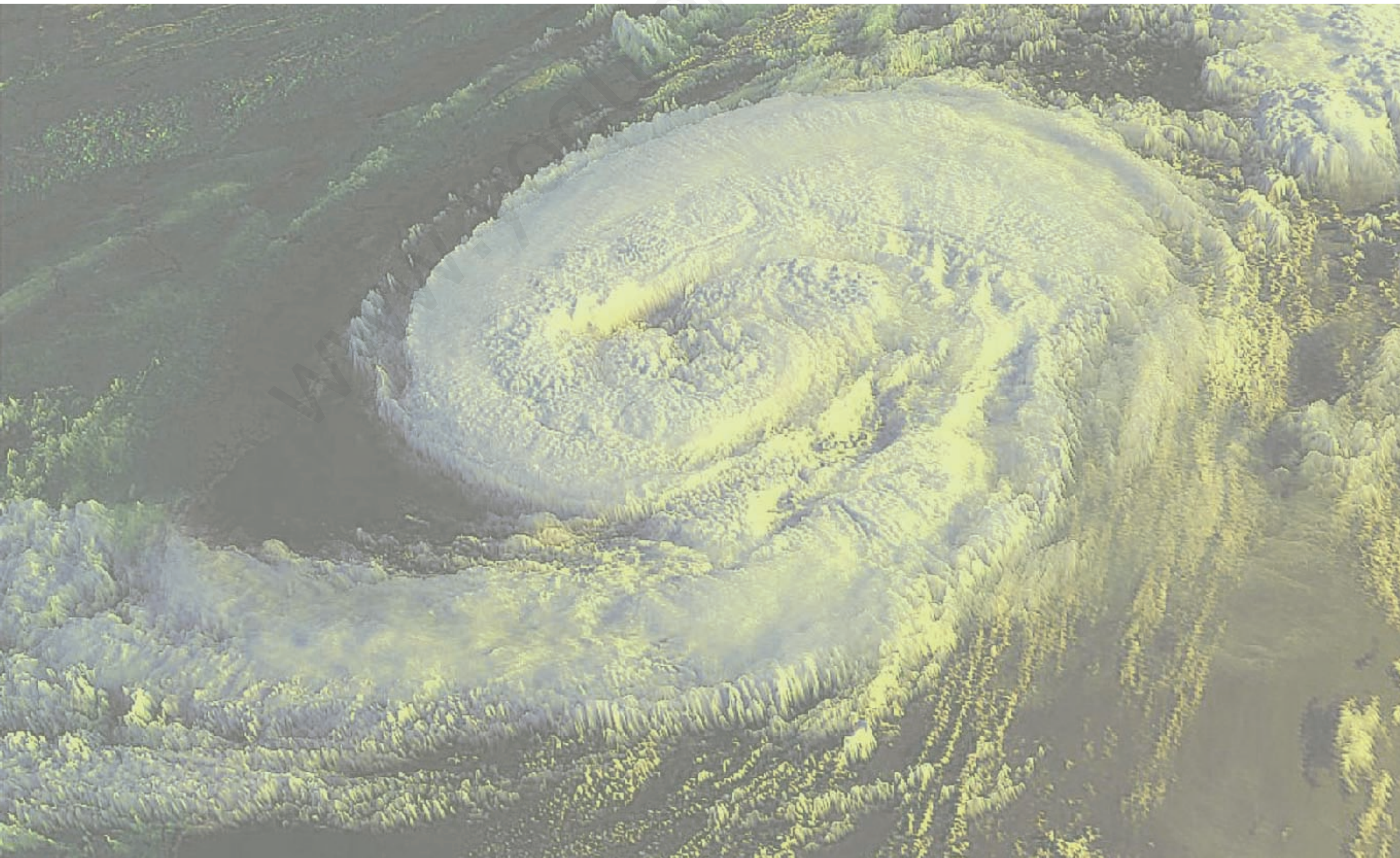
04

FUERZAS CENTRALES. COMPROBACIÓN DE LA SEGUNDA LEY DE KEPLER

En esta Unidad vamos a comprobar que la Segunda Ley de Kepler es una consecuencia de la conservación del momento angular de una partícula cuando está sometida a una fuerza central.

Estudiaremos los conceptos de fuerza central, momento angular y momento de una fuerza respecto de un punto para deducir la Ley de las Áreas de Kepler. Aunque no sea objeto del estudio en esta Unidad, sino de la Unidad 3, las consecuencias de esta ley son muy importantes.

Gracias a los principios de conservación que se rigen mediante las fuerzas centrales, podemos construir giroscopios, que son aparatos capaces de controlar la posición de los aviones, las naves espaciales y los misiles, antes de la existencia del GPS.



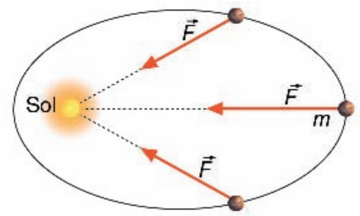


Fig. 4.1. *La fuerza que actúa sobre un planeta está dirigida siempre hacia el Sol.*

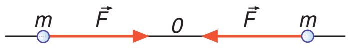


Fig. 4.2. *Una partícula que vibra está sometida a una fuerza central.*

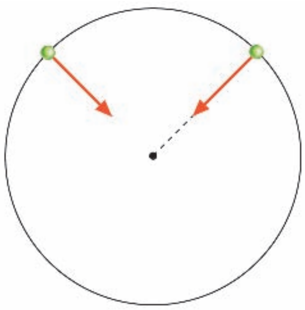


Fig. 4.3. *La fuerza centrípeta es una fuerza central.*

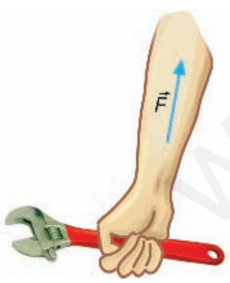


Fig. 4.4. *La capacidad de la fuerza* F *para hacer girar la llave recibe el nombre de momento de la fuerza.*

4.1 Fuerza central

Considera un planeta de masa *m* que se mueve alrededor del Sol en una órbita elíptica (Fig. 4.1). La fuerza gravitatoria que actúa sobre el planeta siempre se encuentra dirigida hacia el Sol, y su valor depende solamente de la distancia *r*. Por tanto, se trata de una fuerza conservativa y recibe el nombre de **fuerza central** porque está dirigida constantemente hacia un mismo punto, cualquiera que sea la posición de la partícula sobre la que está actuando.

Se pueden citar como ejemplos de fuerza central:

- La fuerza recuperadora del m.a.s.; cualquiera que sea la posición de la partícula que vibra, la fuerza elástica siempre está dirigida hacia el punto *O* (Fig. 4.2).
- La fuerza de atracción que ejerce el Sol sobre la Tierra en su movimiento de traslación. En general, la fuerza gravitatoria es una fuerza central. Por tanto, el peso de los cuerpos, al ser la atracción gravitatoria de la Tierra sobre los cuerpos, es otro ejemplo de fuerza central.
- La fuerza que ejerce sobre el electrón el núcleo del átomo de hidrógeno. En general, la fuerza electrostática de Coulomb es una fuerza central.
- La fuerza centrípeta (Fig. 4.3) es otro ejemplo de fuerza central.

El caso que más nos interesa es el sistema formado por varias partículas que interaccionan con una fuerza de tipo central, donde una de ellas, *M*, está fija en el centro de fuerzas, y las otras se mueven respecto de la primera bajo la acción de la fuerza central. Es el caso del Sistema Solar.

4.2 Momento de torsión de una fuerza respecto de un punto

Cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo rígido que puede girar alrededor de algún eje, el cuerpo tenderá a realizar dicha rotación, siempre que dicha fuerza no se dirija o provenga de dicho eje.

La capacidad de una fuerza para hacer girar a un cuerpo alrededor de algún eje se mide por una magnitud conocida con el nombre de **momento de torsión de la fuerza** o simplemente momento de una fuerza (Fig. 4.4). Si sobre un mismo sólido actúan simultánemaente varias fuerzas, que le hacen girar alrededor de un eje, el momento total es igual a la suma vectorial de los momentos de cada una de las fuerzas. El sentido de giro que toma el cuerpo dependerá del momento resultante.

A. ¿De qué depende el momento de una fuerza?

Fíjate en la Figura 4.5 de la página siguiente: se trata de girar una tuerca alrededor del eje *Ox*. Para ello, aplicamos una fuerza $\vec{F}$ en el extremo de la llave inglesa formando un ángulo ϕ con el eje *Oy*. Como puedes observar, solamente la componente F_z tiene la capacidad de realizar el giro. En cambio, la fuerza F_y tiene momento nulo.

La diferencia entre ambas fuerzas está en su distancia al punto *O*; F_z dista *r*, mientras que la distancia entre F_y y el origen *O* es nula.

El momento de F_z viene dado por la expresión:

$$M = F_z\, r$$

Pero de la Figura 4.5 se deduce que:

$$F_z = F \text{ sen } \phi$$

Luego el momento en función de la fuerza aplicada será:

$$M = F\, r \text{ sen } \phi = F\, d$$

- La cantidad $d = r \text{ sen } \phi$, conocida como **brazo** de la fuerza (o **brazo de palanca**), representa la distancia (longitud de la perpendicular) desde el centro de rotación hasta la línea de acción de la fuerza.
- El momento de una fuerza es igual al producto del valor de la fuerza por su brazo de palanca. Observa cómo la componente $F_y = F \cos \phi$ pasa por O y no produce rotación porque su brazo es nulo.
- El momento de una fuerza solamente está definido cuando se especifica un punto de referencia respecto del cual se halla el brazo de palanca.
- A partir de la definición de momento de torsión se ve cómo la capacidad de giro aumenta conforme se incrementa la fuerza, F, y también conforme aumenta su brazo de palanca, d.
- El momento de una fuerza también se expresa como el producto vectorial de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición respecto de O del punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$.

El momento $\vec{M}$ es un vector cuya dirección es perpendicular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{F}$. El sentido viene determinado por el giro que debe darse al vector $\vec{r}$ para hacerlo coincidir con la dirección y sentido de $\vec{F}$, por el camino más corto (Fig. 4.6).

Si el sentido de giro es contrario al de las agujas del reloj, también llamado Norte (↶), el momento es positivo. El momento será negativo si el giro se hace en el mismo sentido que el de las agujas del reloj, también llamado Sur (↷).

Para hallar el sentido del vector momento también se utilizan las reglas del producto vectorial de dos vectores cualesquiera, conocidas como regla del tornillo y regla de la mano derecha (Fig. 4.7). Si un tornillo se coloca perpendicularmente al plano definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en el punto O y se hace girar de forma que tienda a llevar el primer factor ($\vec{a}$) sobre el segundo ($\vec{b}$) describiendo el menor ángulo, entonces el avance del tornillo coincide con el sentido del vector $\vec{c}$. Según la regla del tornillo, el producto vectorial no es conmutativo, puesto que si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$.

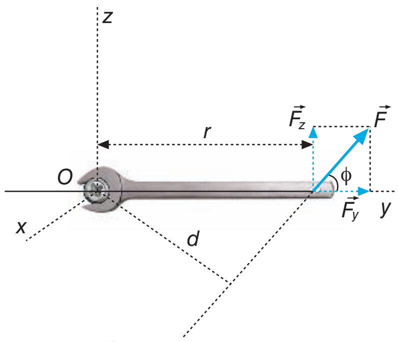


Fig. 4.5. *Brazo de palanca.*

Importante

!

La distancia entre un punto y una recta se mide sobre la perpendicular a la recta trazada desde el punto.

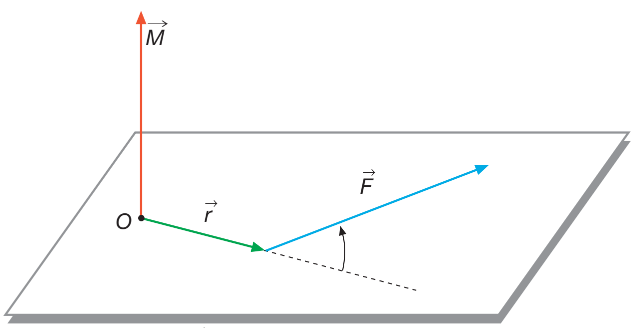


Fig. 4.6. *El vector $\vec{M}$ es perpendicular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{F}$.*

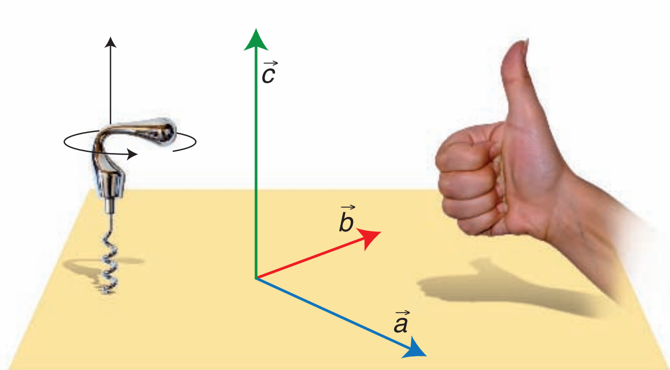


Fig. 4.7. *Reglas del tornillo y de la mano derecha para el producto vectorial de dos vectores: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$.*

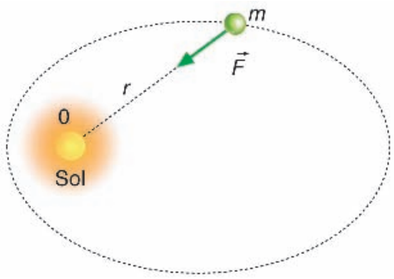


Fig. 4.8. *El momento de torsión de una fuerza central respecto del centro de fuerzas es siempre cero.*

B. Momento de torsión de una fuerza central

Supongamos que una fuerza central de módulo F actúa sobre un planeta m (Fig. 4.8) que gira en torno al Sol. Si tomamos la posición de este como referencia, el momento de torsión que actúa sobre este planeta debido a esta fuerza central es siempre cero, ya que cualquiera que sea la posición del planeta, la fuerza $\vec{F}$ será paralela a $\vec{r}$. Es decir:

$$M = F\,r\,\text{sen}\,\phi = 0$$

Fíjate que la fuerza pasa siempre por el punto respecto del cual se toma el momento. Por tanto, $\phi = 0$. El brazo de palanca es siempre cero.

EJEMPLO 1 (PAU)

El péndulo de la figura 4.9 puede oscilar alrededor del punto *O*. Calcula el momento, respecto del punto *O*, de la fuerza que hace oscilar el péndulo en función del ángulo que forma el hilo con la vertical. ¿En qué posición del péndulo dicho momento es nulo? ¿Respecto de qué punto el peso del péndulo tendría momento nulo?

Solución

La fuerza que actúa sobre el péndulo es el peso de la masa que oscila. Habrá movimiento de oscilación cuando el momento de esta fuerza no sea nulo. Según la Figura 4.9, el brazo de $m\,g$, respecto de *O*, es:

$$d = \ell\ \text{sen}\ \alpha,\ \text{donde}\ \ell\ \text{es la longitud del péndulo.}$$

Por tanto, el momento de torsión que hace oscilar el péndulo es:

$$M = m\,g\,\ell\ \text{sen}\ \alpha$$

Este momento será nulo cuando sen $\alpha = 0$. Esta condición se cumple cuando el péndulo se encuentra en la posición *A*.

El peso del péndulo es una fuerza central respecto del centro de la Tierra. Por tanto, respecto de este punto, el peso tendría momento nulo.

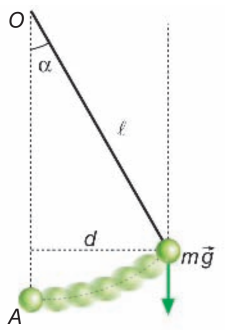


Fig. 4.11.

ACTIVIDADES

1> La masa m de la Figura 4.10 describe una trayectoria circular situada en un plano horizontal. ¿Cuántas fuerzas actúan sobre m? ¿Alguna de estas fuerzas es central? ¿Por qué? Calcula el momento de torsión de las fuerzas indicadas respecto de la mano *O* de la persona.

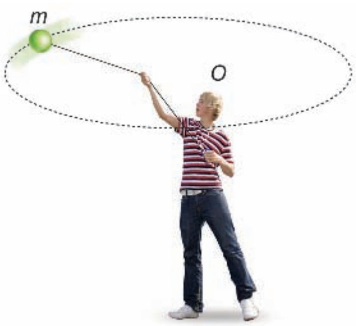


Fig. 4.10.

2> Dibuja el vector momento de la fuerza representada en la Figura 4.11. ¿El giro que produce $\vec{F}$ es positivo o negativo?

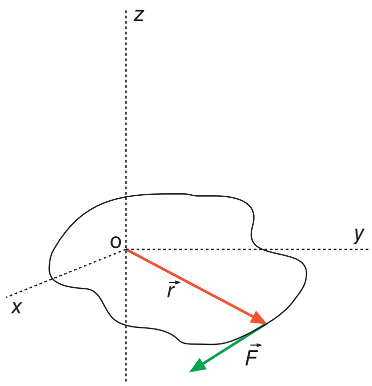


Fig. 4.11.

4.3 Momento angular de una partícula

En cursos anteriores te has familiarizado con el **momento lineal** o cantidad de movimiento de una partícula. Recuerda que se define como el producto de su masa por la velocidad instantánea que posee: $\vec{p} = m\,\vec{v}$.

Esta magnitud determina la interacción con otras partículas. Si una partícula está aislada, lo que ocurre cuando no experimenta ninguna interacción, su momento lineal permanece constante.

Si el momento lineal es importante para definir el estado dinámico de una partícula, también es importante otra magnitud con el nombre de **momento angular,** semejante a la anterior, para describir el movimiento circular.

Antes hemos definido el momento de una fuerza respecto de un punto. Pero dicha definición no es exclusiva de las fuerzas. Se puede hallar el momento respecto de un punto de cualquier vector.

En la Figura 4.12 se representa una partícula de masa m que se mueve describiendo una curva con una velocidad $\vec{v}$. Poseerá, por tanto, una cantidad de movimiento $\vec{p} = m\,\vec{v}$.

Al momento respecto del punto O del vector $\vec{p}$ se le conoce con el nombre de **momento angular** de la partícula m y se representa por la letra $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

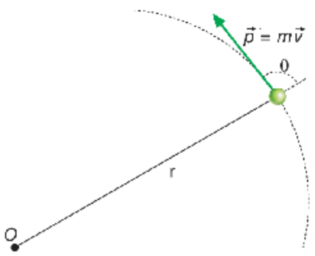


Fig. 4.12. *Momento respecto de un punto de la cantidad de movimiento.*

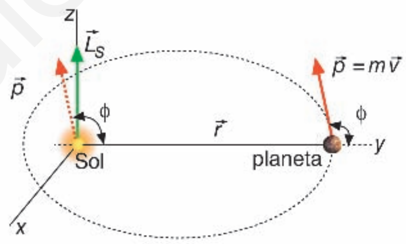


Fig. 4.13. *Momento angular de un planeta respecto del Sol.*

Recuerda

1. Tanto el valor como la dirección de $\vec{L}$ dependen del punto respecto del cual se toma el momento.

   En cualquier circunstancia en que aparezca el momento angular, debe estar clara la posición del punto utilizado para calcularlo.

2. El momento angular es un vector perpendicular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{v}$ (en la Figura 4.13 este plano es el Oxy). El sentido viene dado por las reglas del producto vectorial.

3. Un caso importante es el movimiento circular. En este caso, y tomando como referencia el centro de la circunferencia, $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí (Fig. 4.14), el momento angular es máximo y vale:

   $$L_0 = m\,r\,v \text{ sen } 90° = m\,r\,v = m\,r^2\,\omega = I\,\omega$$

   Donde $I = m\,r^2$ recibe el nombre de **momento de inercia** de la partícula respecto de O.

A. Momento angular de un sistema

El momento angular de un sistema de partículas se obtiene sumando los momentos angulares de todas y cada una de las partículas que componen el sistema.

Por ejemplo, cuando un sólido rígido tiene movimiento de rotación alrededor de un eje, cada una de sus partículas describe un movimiento circular. El momento angular del sólido respecto del eje de rotación será la suma de los momentos angulares de todas sus partículas (Fig. 4.14).

$$L = m_1\,r_1^2\,\omega + m_2\,r_2^2\,\omega + m_3\,r_3^2\,\omega + \ldots =$$
$$= \omega\,(m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + \ldots) = I\,\omega,$$

siendo $I = m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + m_3\,r_3^2 + \ldots$, el momento de inercia del sistema de partículas que forman el sólido rígido.

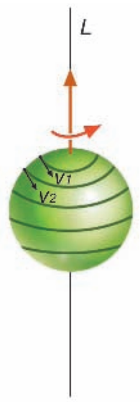


Fig. 4.14. *Momento angular de un sistema de partículas.*

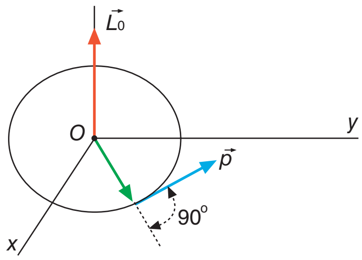


Fig. 4.15. *En el movimiento circular el momento angular es constante y toma el valor máximo.*

+ *Más datos*

Un equipo de científicos bajo la dirección de Michael Brown, jefe del Departamento de Astronomía del Instituto Tecnológico de California, descubrió en octubre de 2003 el décimo planeta del Sistema Solar: Eris.

Se trata de un planeta compuesto de roca y hielo, y se encuentra a más de 14 000 millones de km del Sol, al que da la vuelta una vez cada 560 años.

Su tamaño viene a ser 1,5 veces mayor que el tamaño de Plutón, y tiene un diámetro aproximado de 3 000 km.

Posteriormente, en 2006 y en parte debido a la aparición de este objeto, al reasignarse la categoría de planetas y planetas enanos, dejó de ser considerado planeta para pasar a ser el mayor plutoide (planetas enanos semejantes en tamaño a Plutón y más lejanos que Neptuno).

El nuevo objeto recibió provisionalmente el nombre de 2003 UB313, hasta que se cambió el nombre por el de Eris y es el objeto más alejado del Sistema Solar. Está situado en la «última frontera», una enorme región en forma de disco llena de fragmentos helados de lo que pudo ser el material de construcción de los planetas y los cometas actuales.

El momento de inercia representa en el movimiento de rotación el mismo papel que la masa inerte en el movimiento de traslación: mide la inercia o resistencia que ofrece el sólido a cambiar su velocidad de giro (velocidad angular) cuando sobre él se aplica un momento de torsión de una fuerza.

El momento de inercia de un sólido respecto de un eje es una magnitud que indica cómo está distribuida la masa del sólido respecto de ese eje. Al no encontrarse cada partícula del cuerpo a la distancia R del eje (y dado que R es el valor máximo de esa posible distancia), el momento de inercia de un cuerpo será $I = a\ m\ R^2$, donde a es un número, con valor entre 0 y 1, que representa lo «lejos» del eje de rotación que se encuentra la mayoría de la masa del objeto. En un anillo, y con respecto a su eje central, a vale 1, ya que toda la masa se encuentra a la distancia R.

El momento de inercia de una esfera homogénea y maciza cuando gira alrededor de un diámetro es:

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

Donde M y R son, respectivamente, la masa y el radio de la esfera.

B. Momento angular terrestre

La Tierra posee dos momentos angulares debido a los dos movimientos que realiza.

1. Momento angular orbital, respecto del Sol, correspondiente a su movimiento circular, considerada la Tierra como una partícula:

$$L_0 = r\ M\ v_0 = M\ r^2\ \omega_0$$

donde r es el radio de la órbita y ω_0 la velocidad angular orbital.

$$\omega_0 = \frac{2\ \pi}{1 \text{ año}} = \frac{2\ \pi}{365{,}25 \cdot 86\,400} = \frac{2\ \pi}{3{,}15 \cdot 10^7} \text{ rad/s}$$

$$L_0 = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot \frac{2\ \pi}{3{,}15 \cdot 10^7} = 2{,}7 \cdot 10^{40} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

2. Momento angular intrínseco, correspondiente a su movimiento de rotación en torno a su eje, considerada la Tierra como un sólido.

$$L_e = I\ \omega$$

siendo ω la velocidad angular de rotación.

$$\omega = \frac{2\ \pi}{1 \text{ día}} = \frac{2\ \pi}{86\,400} \text{ rad/s}$$

$$L_e = \frac{2}{5} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6{,}4 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \frac{2\ \pi}{86\,400} = 7{,}1 \cdot 10^{33} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

El momento angular total será:

$$L_T = r\ M\ v_0 + I\ \omega$$

Momento angular de un electrón

En el caso del átomo, cada electrón también tiene dos momentos angulares. Uno debido a su movimiento alrededor del núcleo: **momento orbital** (ℓ) y otro intrínseco o **spin** (s) debido a su movimiento de rotación. Ambos momentos están cuantizados. La cuantización del primero depende del radio de la órbita o número cuántico principal. La del segundo depende del sentido de rotación del electrón. La cuantización de los momentos angulares del electrón se estudia con más detalle en la Unidad 12.

EJEMPLO 2 (PAU)

Una partícula de masa 0,50 kg se mueve en el plano *Oxy* con una velocidad de 4,0 m/s a lo largo de una recta de ecuación 2*x* – *y* + 2 = 0 (Fig. 4.16). Si el móvil se encuentra en el punto (0, 2), calcula el módulo, la dirección y el sentido del momento angular de la partícula.

a) **Respecto del origen de coordenadas.**
b) **Respecto del punto *O′* de la recta.**

Solución

a) En primer lugar, hallamos las coordenadas de los puntos *P* y *O′*. De la ecuación de la recta se deduce: *P* (0, 2) y *O′* (–1, 0).

El ángulo formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ tiene un valor:

$$\text{tg}\ \phi = \frac{|O'\,O|}{|\vec{r}|} = \frac{1}{2};\ \phi = 26{,}56° \ \Rightarrow\ \text{sen}\ \phi = 0{,}447'$$

El módulo del momento angular será:

$$|\vec{L}_0| = r\,v\,m\ \text{sen}\ \phi = m\,v\,d = 2\ \text{m} \cdot 0{,}5\ \text{kg} \cdot 4{,}0\ \text{m/s} \cdot 0{,}447 = 1{,}8\ \text{kg m}^2\text{/s},$$

En la dirección perpendicular al plano *Oxy* y dirigido hacia dentro del papel.

b) Respecto del punto *O′*, el momento angular es nulo porque el ángulo ϕ = 0.

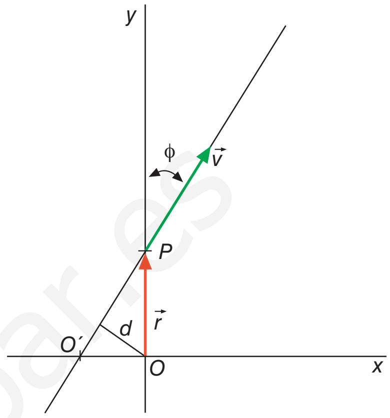


Fig. 4.16.

EJEMPLO 3 (PAU)

Un automóvil de 1 500 kg se mueve en una pista circular de 50 m de radio con una rapidez de 40 m/s. Calcula el momento angular del automóvil respecto del centro de la pista.

Solución

En el movimiento circular, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 90°. En este caso, el módulo del momento angular será:

$$L_0 = m\,r\,v = 1500\ \text{kg} \cdot 50\ \text{m} \cdot 40\ \text{m/s} = 3 \cdot 10^6\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}$$

Dirección perpendicular al plano *Oxy*, y de sentido positivo.

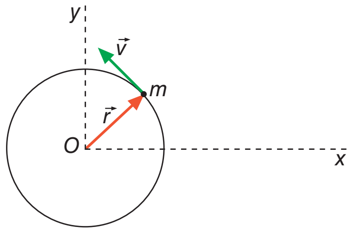


Fig. 4.17.

ACTIVIDADES

3> Si una partícula se mueve en línea recta, ¿puede ser cero su momento lineal? ¿Puede ser cero su momento angular? En caso afirmativo, ¿respecto de qué punto o puntos sería nulo?

4> Si la velocidad lineal de una partícula es constante en el tiempo, ¿puede variar su momento angular en el tiempo? Razona la respuesta.

5> ¿Qué movimiento ha de tener una partícula para que su momento angular permanezca constante?

6> Una partícula de 0,5 kg se mueve a lo largo del eje *Oy* con una velocidad de 2 m/s.

a) Calcula el módulo del momento angular de esta partícula respecto de los puntos (0, 0), (4, 0) y (3, 5).

b) Calcula el momento angular de la partícula respecto de estos puntos si su trayectoria es la bisectriz $y = x$.

S: *a)* L = 0,45 kgm²/s; *b)* L = 2,8 kg m²/s

4.4 Relación entre el momento de torsión y el momento angular

! Importante

La Ley de Conservación del Momento Angular es una ley fundamental de la Física que tiene el mismo nivel de importancia que la Ley de Conservación del Momento Lineal o que la Ley de Conservación de la Energía.

+ Más datos

Casos en que el momento de las fuerzas exteriores es cero:

a) Cuando en el sistema solamente actúan fuerzas internas, como explosiones, acoplamiento de un cuerpo con otro, etc.

b) Cuando la dirección de la fuerza externa coincide con el radio. Esto ocurre con las fuerzas centrales.

c) Cuando las fuerzas exteriores están aplicadas en el eje de giro.

Hemos obtenido la expresión $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ para el momento angular de una partícula, y $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ para el momento de una fuerza.

Si derivamos la primera ecuación respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

El término $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,\vec{v}) = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a} = \vec{F}$ es el valor de la fuerza, como nos indica la Segunda Ley de Newton.

El término $\frac{d\vec{r}}{dt}$ es la velocidad instantánea.

Por tanto, el producto $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\,\vec{v} = 0$, ya que los vectores $\vec{v}$ y $m\,\vec{v}$ son paralelos.

Teniendo en cuenta estos resultados, la derivada del momento angular tomaría la forma:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

El **momento de la fuerza** con respecto a un punto *P* (o a un eje) que actúa sobre una partícula es igual a la variación que experimenta con el tiempo el momento angular de esa partícula con respecto a ese mismo punto o eje:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

A. Conservación del momento angular

De la expresión anterior se deduce una consecuencia importante: si no actúa ningún momento de torsión sobre una partícula, el momento angular de esa partícula permanece constante.

Es decir, si $\vec{M} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{L} = \text{cte.} \;\Rightarrow\; I\omega = \text{cte.}$

Esto significa que si un sistema evoluciona de tal forma que el momento de las fuerzas exteriores es cero, el momento de inercia inicial por su velocidad angular inicial es igual al momento de inercia final por su velocidad angular final:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

ACTIVIDADES

7> Una partícula se mueve sobre una recta y se sabe que el momento de torsión que actúa sobre ella es cero respecto de un punto no especificado. ¿Implica esto que sobre la partícula no actúa ninguna fuerza? ¿Puedes concluir que la velocidad de la partícula es constante?

8> La masa de la Luna es $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg y la distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna $3{,}84 \cdot 10^{8}$ m. Calcula el momento angular de la Luna respecto a la Tierra. Dato: la Luna tarda 27,32 días en dar una vuelta alrededor de la Tierra.

S: $L = 2{,}88 \cdot 10^{34}$ kg m²/s

B. Ecuación fundamental de la dinámica del movimiento de rotación

La expresión $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ recibe el nombre de **ecuación fundamental de la dinámica de rotación,** que aplicada a un sólido rígido se puede expresar en función de la aceleración angular:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\,(I\,\vec{\omega})}{dt} = I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\,\vec{\alpha}$$

Observa la semejanza de esta expresión con la Ley Fundamental de la Dinámica de Traslación:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(m\,\vec{v}) = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a}$$

El paralelismo entre el movimiento de rotación y el movimiento de traslación queda reflejado en la Tabla 4.1.

Magnitud	Movimiento de traslación	Movimiento de rotación	Relación
Espacio	s (en m)	φ (en rad)	$s = \phi\, R$
Masa	Inerte m (kg)	Momento de inercia (kg m^2)	$I = a\, m\, R^2$
Velocidad media	$v = \frac{s}{t}$ (m/s)	$\omega = \frac{\varphi}{t}$ (rad/s)	$v = \omega\, R$
Velocidad instantánea	$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	$v = \omega\, R$
Aceleración media	$a = \frac{v_f - v_0}{t}$ (m/s^2)	$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$	$a = \alpha\, R$
Aceleración instantánea	$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$a = \alpha\, R$
Momento	Lineal $\vec{p} = m\,\vec{v}$	Angular $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Ecuación fundamental	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\vec{a}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\,\vec{\alpha}$	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Energía cinética	$E = \frac{1}{2}\, m\, v^2$	$E = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2$	
Ecuaciones del movimiento	$s = v_0 t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$ $v_f^2 - v_0^2 = 2\, a\, s$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\, \alpha\, t^2$ $\omega_f^2 - \omega_0^2 = 2\, \alpha\, \varphi$	

Tabla 4.1. *Relación entre las magnitudes de rotación y traslación.*

Recuerda

El Principio de la Conservación del Momento Angular es válido tanto en la Física cuántica como en la Física del cosmos y en la Física clásica.

- La cuantización del momento angular de las partículas atómicas desempeña un papel fundamental en la descripción de los sistemas atómicos y nucleares.
- La conservación del momento angular es clave en el desarrollo de las teorías sobre el origen del Sistema Solar y sobre la contracción de las estrellas gigantes (como se indica en la página 105). El momento angular también explica el movimiento de los astros y resuelve muchos otros problemas de Astronomía.
- Los acróbatas, los saltadores de trampolín, los patinadores sobre hielo, etc., utilizan el principio de la conservación del momento angular. Cuando un patinador quiere aumentar su velocidad angular encoge su cuerpo al máximo para que su momento de inercia sea mínimo. En cambio, cuando quiere disminuir su velocidad extiende los brazos para que el momento de inercia sea mayor. Un gato se las arregla para caer siempre sobre sus patas usando el mismo principio.

ACTIVIDADES

9> Una plataforma gira con una velocidad angular ω. En un momento dado se desprende una porción de ella. El resto de la plataforma: *a)* no modifica la velocidad; *b)* gira más deprisa; *c)* gira más despacio.

10> Sobre un disco que gira con una velocidad ω cae libremente un trozo de plastilina quedándose adherida a él. El disco: *a)* disminuirá su velocidad; *b)* aumentará su velocidad; *c)* seguirá girando con la misma velocidad.

11> PAU Define el momento angular de una martícula de masa m y velocidad $\vec{v}$ respecto a un punto O. Pon un ejemplo razonado y de ley o fenómeno físico que sea una explicación de la conservación del momento angular.

4.5 Momento angular y movimiento planetario. Segunda Ley de Kepler

Todos los planetas y satélites se mueven bajo fuerzas centrales, y por tanto, su momento angular permanece constante. Una consecuencia de que el momento angular de un planeta permanezca constante es la Ley de las Áreas de Kepler.

Para deducir la Ley de las Áreas nos basamos en la siguiente propiedad: toda partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central tiene momento angular constante.

Efectivamente, ya hemos visto que el momento de la fuerza central respecto del centro de fuerzas es siempre nulo. También sabemos que:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Por tanto, si $\vec{M} = 0$, se deduce que $\vec{L}$ = cte. Esto implica que el momento angular ha de permanecer constante en módulo, constante en dirección y constante en sentido, de donde se deducen las siguientes consecuencias:

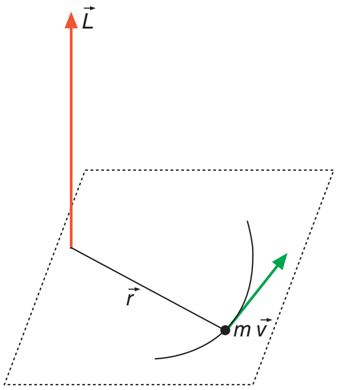


Fig. 4.18. *Una partícula sometida a una fuerza central, tiene una trayectoria plana.*

1. Por ser constante la dirección del momento angular, el movimiento de la partícula tiene lugar en un plano.

   En efecto, si se tiene en cuenta que $\vec{L}$, por definición, es perpendicular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{v}$, para que la dirección de $\vec{L}$ no varíe los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ han de estar siempre en el mismo plano (Fig. 4.18). Las cónicas son curvas que cumplen esta condición.

2. Si $\vec{L}$ mantiene constante su sentido, la partícula recorrerá la trayectoria siempre en el mismo sentido, como se deduce de la regla del tornillo, que nos da el sentido del producto vectorial $\vec{L} = \vec{r} \times m\,\vec{v}$.

3. Si el módulo de $\vec{L}$ **permanece constante,** se cumple la Segunda Ley de Kepler: las áreas barridas por el vector que une el centro de fuerzas con la partícula son proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.

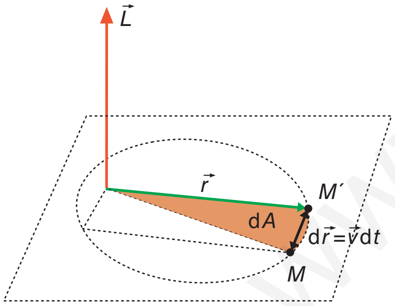


Fig. 4.19. *Cuando un planeta pasa de* M *a* M′, *el vector de posición barre el área* d*A*.

En efecto, supongamos que un planeta tarda un tiempo dt en pasar de M hasta M' (Fig. 4.19). El vector de posición $\vec{r}$ ha barrido en ese tiempo un área dA. Esta área es la mitad del área $|\vec{r} \times d\vec{r}|$ del paralelogramo formado por los vectores $\vec{r}$ y $d\vec{r}$.

$$dA = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times \vec{v}\,dt| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times \vec{v}|\ dt$$

Teniendo en cuenta que $|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\,\vec{v}| = |\vec{r} \times \vec{v}|\ m$, se deduce:

$$dA = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\vec{L}|}{m}\ dt \Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\vec{L}|}{m}$$

Si $\vec{L}$ es constante, se deduce que $\frac{dA}{dt}$ también lo es. El término $\frac{dA}{dt}$ recibe el nombre de **velocidad areolar.**

La Ley de las Áreas también se puede enunciar diciendo que toda partícula que se mueva bajo una fuerza central lo hace con una velocidad areolar constante.

La Ley de las Áreas es aplicable a cualquier fuerza central, aunque no fuera proporcional al inverso del cuadrado de la distancia. Si la fuerza central varía con $\frac{1}{r^2}$, entonces se puede demostrar que las órbitas descritas son elipses.

En el caso de que un planeta se mueva en una órbita elíptica alrededor del Sol, las posiciones más cercana y más alejada del planeta respecto del Sol se conocen como **perihelio** y **afelio** respectivamente (Fig. 4.20).

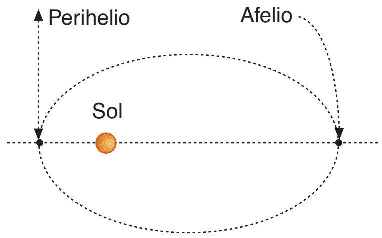


Fig. 4.20. *Posiciones de perihelio y afelio de un planeta.*

De la Ley de las Áreas se deduce una consecuencia importante: un planeta que gira alrededor del Sol va más deprisa en perihelio que cuando se encuentra en afelio.

Como puedes ver en la Figura 4.21, si un planeta tarda el mismo tiempo en pasar de P_1 a P_2 (afelio) que en pasar de P_3 a P_4 (perihelio), según la Ley de las Áreas se debe cumplir que $A_1 = A_2$.

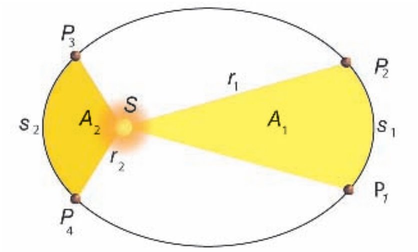


Fig. 4.21. *Según la Ley de las Áreas, la velocidad de un planeta es mayor cuanto más próximo al Sol se encuentra.*

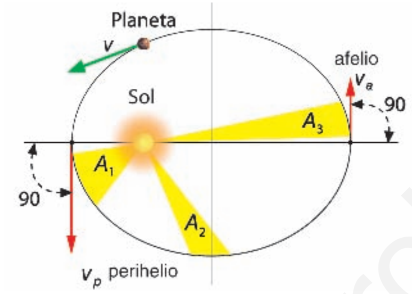


Fig. 4.22. *En el perihelio y en el afelio, el vector de posición es perpendicular al vector velocidad.*

Observando los triángulos mixtilíneos vemos que se cumple:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\, s_1\, r_1 = \frac{1}{2}\; v_1\, t\, r_1 \\ A_2 &= \frac{1}{2}\, s_2\, r_2 = \frac{1}{2}\; v_2\, t\, r_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\; v_1\, r_1 = v_2\, r_2$$

como $r_1 > r_2$, se deduce que $v_1 < v_2$.

Por tanto, a medida que un planeta describe su órbita en torno al Sol, su velocidad aumenta conforme se aproxima a este, alcanzando su valor máximo en la posición de perihelio, y disminuye a medida que se aleja hasta alcanzar la mínima velocidad en el afelio.

El momento angular del planeta es constante en todos los puntos de su trayectoria. En perihelio y en afelio, el vector de posición es perpendicular al vector velocidad (Fig. 4.22). En estas posiciones se cumple que:

$$r_1\, m\, v_1 \text{ sen } 90° = r_2\, m\, v_2 \text{ sen } 90°$$

Es otra manera de obtener la propiedad:

$$r_p\, v_p = r_a\, v_a$$

Como la órbita no es perpendicular en todo momento al vector de posición a lo largo del cual actúa la fuerza central, se puede concluir que esta fuerza tiene una componente en la dirección de la trayectoria que hace variar el módulo de la velocidad.

Más datos +

Cuando el momento angular de un cuerpo permanece constante, el eje de rotación del cuerpo no cambiará su orientación a menos que actúe un momento de torsión que lo altere. Este hecho es de gran importancia para el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. La Tierra no experimenta un momento significativo de torsión, ya que la fuerza principal que actúa sobre ella, la atracción del Sol, es central. Por tanto, la dirección del eje de rotación de la Tierra permanece fijo respecto del Universo. Este comportamiento se pone de manifiesto en la Figura 4.23 de la página siguiente.

Aunque la trayectoria de la Tierra es aproximadamente circular, el eje de rotación de la Tierra no es perpendicular al plano definido por su órbita, sino que forma un ángulo fijo con el plano. Debido a la conservación del momento angular mantiene esta orientación al girar alrededor del Sol.

Debido a esto, el polo Norte de la Tierra se encuentra en un continuo día durante el verano y en la oscuridad en el invierno. En el polo Sur ocurre lo contrario (Fig. 4.23).

ACTIVIDADES

12> PAU Un planeta sigue una órbita elíptica alrededor de una estrella, cuando pasa por el periastro *P,* punto de su trayectoria más próximo a la estrella, y por el apoastro *A,* punto más alejado, explica y justifica las siguientes afirmaciones:

a) Su momento angular es igual en ambos puntos y su celeridad es diferente.
b) Su energía mecánica es igual en ambos untos.

Recuerda

Cuando una partícula se encuentra sometida a la acción de una fuerza central, esta partícula se mueve siempre en el mismo sentido, con trayectoria plana y con velocidad areolar constante.

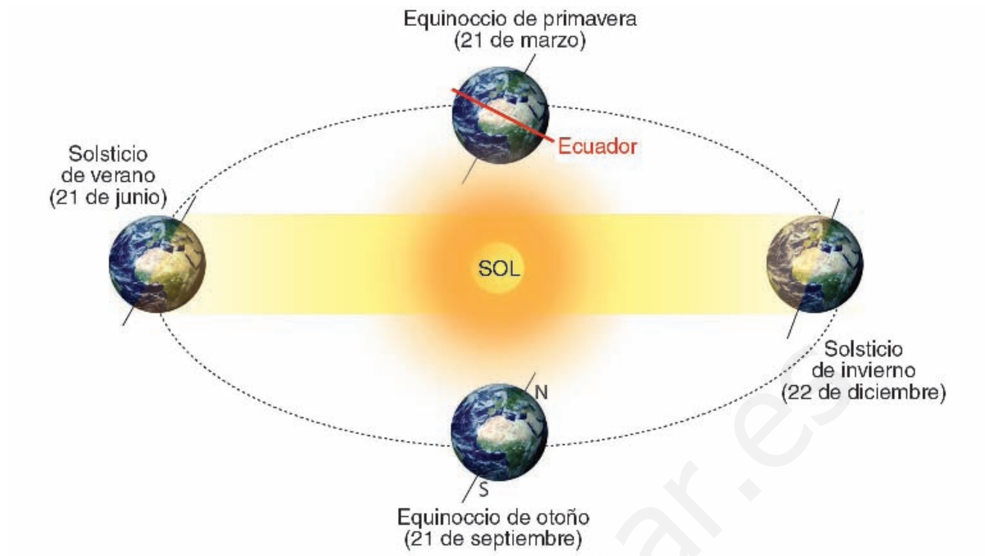


Fig. 4.23. *El eje de rotación de la Tierra mantiene su orientación porque el momento angular de la Tierra es constante.*

EJEMPLO 4 (PAU)

Un planeta imaginario se mueve en una órbita elíptica de mucha excentricidad alrededor del Sol (Fig. 4.24). Cuando está en perihelio su radio vector es $r_a = 4{,}0 \cdot 10^7$ km, y cuando está en afelio, $r_b = 15 \cdot 10^7$ km. Si la velocidad en perihelio es 1 000 km/s, calcula:

a) **La velocidad en la posición de afelio.**
b) **La velocidad areolar del planeta.**
c) **El semieje mayor de la órbita.**

Solución

a) Como el planeta está sometido a una fuerza central ejercida por el Sol, el momento angular del planeta ha de ser constante. En las posiciones *a* y *b* la velocidad es perpendicular a *r*. Por tanto, el módulo del momento angular en dichas posiciones es:

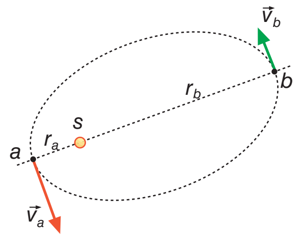


Fig. 4.24.

$$\left.\begin{aligned} L_a &= r_a\, m\, v_a \text{ sen } 90° \\ L_b &= r_b\, m\, v_b \text{ sen } 90° \end{aligned}\right\} \; r_a\, v_a = r_b\, v_b$$

De donde se deduce que:

$$v_b = \frac{r_a\, v_a}{r_b} = \frac{4 \cdot 10^7 \text{ km} \cdot 10^3 \text{ km/s}}{15 \cdot 10^7 \text{ km}} = 2{,}7 \cdot 10^2 \text{ km/s}$$

Es decir, se cumple la consecuencia de la Ley de las Áreas, según la cual el planeta que gira alrededor del Sol va más deprisa cuando se encuentra en perihelio que en afelio.

b) La velocidad areolar es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2\, m} = \frac{10^3 \text{ km/s} \cdot 4 \cdot 10^7 \text{ km}}{2} = 2 \cdot 10^{10} \text{ km}^2/\text{s}$$

c) El semieje mayor de la elipse es la semisuma de r_a y r_b:

$$a = \frac{r_a + r_b}{2} = \frac{4 \cdot 10^7 \text{ km} + 15 \cdot 10^7 \text{ km}}{2} = 9{,}5 \cdot 10^7 \text{ km}$$

EJEMPLO 5 (PAU)

Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica, para cada una de las siguientes magnitudes, si su valor es mayor, menor o igual en el afelio comparado con el perihelio:

a) **Momento angular respecto de la posición del Sol.**
b) **Momento lineal.**
c) **Energía potencial.**
d) **Energía mecánica.**

Solución

a) El Sol y Plutón están ligados por una fuerza central y por tanto conservativa, de forma que se cumple la Ley de Conservación del momento angular. De este modo, el momento angular $\vec{L}$ permanece constante en afelio y perihelio.

b) Según la Ley de Kepler de las áreas, $r\,v$ = constante, por tanto la velocidad lineal en el perihelio es mayor que en el afelio (por ser el radio menor $r_p < r_a$), el momento lineal, es: $\vec{p} = m\,\vec{v}$, y la velocidad es mayor en el perihelio que en el afelio.

c) La energía potencial en un punto es $E_p = -GM\dfrac{m}{r}$. Así, en el perihelio es menor que en el afelio, al ser E_p negativa y $r_p < r_a$.

d) La energía mecánica se mantiene constante al tratarse de una fuerza conservativa.

EJEMPLO 6 (PAU)

El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio el cometa está a 8,75 · 10^7 km del Sol, y en el afelio está a 5,26 · 10^9 km del Sol.

a) **¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad? ¿Y mayor aceleración?**
b) **¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿Y mayor energía mecánica?**

Solución

a) El momento angular se conserva, ya que el cometa está sometido a una fuerza central.

Por tanto, se verifica que: $\vec{r}_a \times m\,\vec{v}_a = \vec{r}_p \times m\,\vec{v}_p$.

En el perihelio y en el afelio los vectores de posición y velocidad son perpendiculares entre sí, por lo que se cumple que $r_p\,v_p = r_a\,v_a$.

Si $r_a > r_p$, se ha de cumplir que $v_a < v_p$.

En las posiciones de perihelio y de afelio solamente existe la aceleración centrípeta o normal:

$$a_p = -\frac{G\,M}{r_p^2}\,; \qquad a_a = -\frac{G\,M}{r_a^2} \;\Rightarrow\; \frac{a_p}{a_a} = \frac{r_a^2}{r_p^2}$$

Por tanto, se cumple que $a_p > a_a$.

b) Energía potencial en el perihelio y en el afelio:

$$E_p = -\frac{G\,M\,m}{r_p}\,; \qquad E_a = -\frac{G\,M\,m}{r_a}$$

$E_p < E_a$, al ser más negativa en el perihelio que en el afelio.

Debido a que la fuerza que actúa sobre el cometa es central, que es conservativa, la energía mecánica se conserva. Es la misma, pues, en el perihelio que en el afelio (ten en cuenta que la energía cinética en el perihelio es mayor que en el afelio y se compensa la menor energía potencial).

Más datos

El cometa Halley tuvo su última aparición periódica en 1986. Esta vez la expectación científica con que fue recibido contrasta con el miedo supersticioso que acompañó sus anteriores visitas.

De hecho, la aparición de un gran cometa, siempre con las mismas características, estuvo relacionada con hechos ocurridos por la misma época (asesinato de Julio César, invasión de los hunos, muerte de Ludovico Pío en triste guerra contra sus hijos, etcétera).

El astrónomo inglés E. Halley (1656-1742) estudió las órbitas de grandes cometas aparecidos en los años 1456, 1531, 1607 y 1682, llegando a la conclusión de que se trataba del mismo cometa, hoy conocido con su nombre, que nos visitaba periódicamente cada 76 años, y predijo en 1705 su nueva aparición para 1769 (no pudo verla por haber muerto antes).

Hasta el presente se consideran 31 apariciones del cometa Halley rigurosamente comprobadas. La más antigua es del año 240 a.C., según documentos chinos.

Kepler, en 1607, fue el primero en calcular su órbita elíptica, muy excéntrica (0,957).

! Importante

Recibe el nombre de **excentricidad de una elipse**, la distancia que media entre el centro de la elipse y uno de sus focos. Su valor viene dado por el cociente $e = \frac{c}{a}$.

CD y CEO

En el CD puedes encontrar más Pruebas de Acceso a la Universidad.

! Importante

Al igual que para el Sol se dice afelio y perihelio, a la posición de un satélite más cercana a la Tierra se le llama **perigeo**, y a la más alejada, **apogeo**.

EJEMPLO 7 (PAU)

Se lanza un satélite en una dirección paralela a la superficie de la Tierra (Fig. 4.25) con una velocidad de 8 000 m/s desde una altitud de 500 km. Determina la velocidad del satélite cuando alcanza su máxima altitud de 4 500 km. ¿Qué excentricidad tiene la órbita que describe? Datos: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m.

Solución

Como el satélite está sometido a una fuerza central dirigida hacia el centro de la Tierra, el momento angular del satélite es constante:

$$L_A = L_B;\ r_A\, m\, v_A = r_B\, m\, v_B$$

$$v_B = \frac{r_A\, v_A}{r_B} = \frac{6\,900 \text{ km} \cdot 8\,000 \text{ m/s}}{10\,900 \text{ km}} = 5\,064 \text{ m/s}$$

Fig. 4.25.

El centro de la Tierra coincide con uno de los focos de la elipse que describe el satélite. Por tanto, el semieje mayor será:

$$a = \frac{4\,500 \text{ km} + 12\,800 \text{ km} + 500 \text{ km}}{2} = 8{,}9 \cdot 10^6 \text{ m (véase la Figura 4.26)}$$

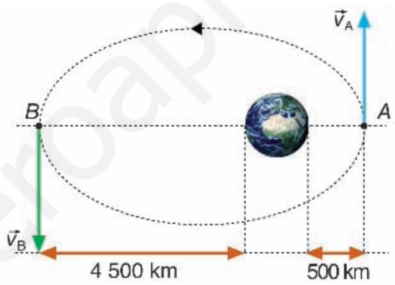


Fig. 4.26.

La distancia de uno de los focos al centro de la elipse viene dada por:

$$c = a - F\,A = 8\,900 \text{ km} - (R_T + 500 \text{ km}) = 2\,000 \text{ km (Fig. 4.28)}$$

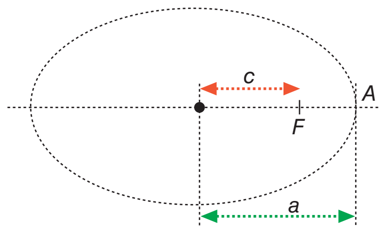


Fig. 4.27.

La excentricidad se define como:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\,000 \text{ km}}{8\,900 \text{ km}} = 0{,}22$$

ACTIVIDADES

13> ¿Cómo puedes demostrar que un planeta en una órbita circular se desplaza con movimiento circular uniforme?

14> ¿Hay algún instante en que un planeta con órbita elíptica esté exento de aceleración?

15> Supón que repentinamente se duplica la atracción del Sol sobre la Tierra. ¿Qué puedes decir en este caso sobre la velocidad orbital de la Tierra y de la órbita que describe? ¿Se modificará el momento angular de la Tierra? ¿Cambiará el plano de su órbita? Razona tus respuestas.

El momento angular y la evolució de las estrellas

El efecto Doppler, que vimos en la Unidad 2, nos indica que las estrellas también tienen movimiento de rotación alrededor de un eje; porque mediante el espectro se comprueba que un borde del Sol se aproxima de continuo a nosotros, mientras que el otro borde se aleja constantemente.

La velocidad de rotación de las estrellas depende de su edad. Así, las estrellas más jóvenes giran con una velocidad pequeña, mientras que las estrellas próximas a su muerte giran con una velocidad angular muy alta. Esta evolución se debe a la **Ley de la Conservación del Momento Angular.**

Las estrellas, al igual que los seres vivos, están sometidas a las leyes evolutivas que suponen un principio, un periodo de actividad, otro de decadencia y un final. Por esto, podemos hablar de **nacimiento y muerte de las estrellas.**

Nacimiento de una estrella

Los glóbulos galácticos, que no son otra cosa que nubes de gas y polvo interestelar, adquieren forma esférica con el tiempo, y se contraen por gravitación, dando lugar a una elevación de temperatura, del orden de 2 500 °C en la superficie, con emisión de radiaciones infrarrojas, hasta iniciarse reacciones nucleares en su interior y alcanzar millones de grados de temperatura en el centro.

La estrella nace cuando la energía que emite se encuentra en el espectro visible. Se caracteriza por su baja densidad. La edad de una estrella depende de su color: las estrellas jóvenes son de color rojo y las estrellas viejas son blancas.

En el proceso de formación de una estrella se conserva el momento angular $L = I\,\omega$, ya que la única fuerza que ha intervenido en la contracción del glóbulo galáctico es la atracción gravitatoria, que es una fuerza central.

Las estrellas jóvenes se caracterizan por su gran tamaño y, por tanto, un momento de inercia muy grande (al ser proporcional a la masa de la estrella y al cuadrado del radio), con lo que la velocidad de rotación será muy pequeña.

Periodo de actividad y decadencia

Cuando el hidrógeno se agota en el núcleo de la estrella y se convierte en helio, la estrella roja se contrae y se convierte en **pulsante** mediante la «combustión» de helio, para lo que requiere en su interior temperaturas del orden de 200 millones de grados, hasta volverse azulada y convertirse en una **enana blanca,** con una temperatura en superficie de 20 000 °C.

Una enana blanca se caracteriza por su pequeño tamaño y su elevada densidad: puede ser más pequeña que la Tierra, aunque su densidad es tan grande que un grano de arena tendría la masa de un rascacielos.

En estos casos, al disminuir el tamaño, el momento de inercia también disminuye, aumentando drásticamente la velocidad angular, para que el momento angular no varíe.

Todas las estrellas, dependiendo de su masa inicial, acaban convirtiéndose en:

- **Enanas:** estrellas cuya masa es del orden del Sol.
- **Estrellas de neutrones:** estrellas de masa muy grande y diámetro de tan sólo 10 a 20 km. Su densidad es tal que imposibilita la existencia de protones y electrones aislados.
- **Agujeros negros:** estrellas supermasivas. Los agujeros negros se forman cuando una estrella de gran masa sufre un colapso gravitatorio. Mientras la estrella está emitiendo luz y calor se equilibra a sí misma: la fuerza gravitatoria es contrarrestada por la fuerza hacia el exterior debida a la presión térmica originada por las reacciones nucleares. Al consumirse el combustible, esta fuerza equilibradora cesa y la estrella se contrae de tal forma que se derrumba sobre sí misma. Su campo gravitatorio es tan intenso, que la velocidad de escape es superior a la de la luz. De un agujero negro no puede escapar ni la materia ni la radiación de ningún tipo.

Cuestiones

1> El origen y evolución de las estrellas se basa en el principio de conservación:
a) De la energía; *b)* del momento angular; *c)* del momento lineal.

2> Una gigante roja de radio $R = 10^6$ km y de velocidad angular ω evoluciona durante millones de años hasta convertirse en una enana blanca de $R = 5 \cdot 10^3$ km. Señala la/s respuesta/s correcta/s:
a) Su densidad ha aumentado 8 000 veces; *b)* ω se ha multiplicado por 40 000; *c)* el momento angular se ha dividido entre 19.

3> En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:
a) Se conserva el momento angular y el momento lineal; *b)* se conserva el momento lineal y el momento de la fuerza; *c)* varía el momento lineal y se conserva el momento angular.

4> Un satélite gira alrededor de un planeta describiendo una órbita elíptica, ¿cuál de las siguientes magnitudes permanece constante?
a) El momento angular; *b)* el momento lineal; *c)* la energía potencial.

Custiones y problemas

1> ¿Cuánto vale el momento de torsión de una fuerza si $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelos? ¿Cómo deben ser $\vec{r}$ y $\vec{F}$ para que el momento de torsión de $\vec{F}$ sea máximo?

2> Una partícula se mueve en el eje *Ox* por la acción de una fuerza constante que la aleja del origen de coordenadas. ¿Cómo varía con el tiempo el momento angular de la partícula con respecto a dicho origen?

3> Una partícula con velocidad constante tiene momento angular nulo respecto de un punto. ¿Qué se deduce de esto?

4> Se está poniendo de moda entre los ciclistas usar ruedas lenticulares cuando realizan pruebas contrarreloj. ¿Tiene alguna explicación física esta preferencia, suponiendo que estas ruedas tienen la misma masa y el mismo radio que las ruedas normales?

5> ¿Cuánto vale en m^2/s la velocidad areolar de la Tierra? Datos: radio medio de la órbita terrestre $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.
S: $v_a = 2{,}2 \cdot 10^{15}$ m^2/s

6> En su afelio, el planeta Mercurio está a $6{,}99 \cdot 10^{10}$ km del Sol, y en su perihelio queda a $4{,}63 \cdot 10^{10}$ km del mismo. Su velocidad orbital es $3{,}88 \cdot 10^4$ m/s en el afelio. ¿Cuál es su velocidad orbital en el perihelio? ¿Qué excentricidad tiene la órbita de Mercurio?
S: $v = 5{,}86 \cdot 10^4$ m/s; $e = 0{,}203$

7> Calcula el momento angular orbital de la Tierra si describe una órbita circular alrededor del Sol de radio $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Datos: $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.
S: $L_T = 2{,}7 \cdot 10^{40}$ kg m^2/s

8> Demuestra que el periodo de un planeta de masa *m* en función del área *S* de la órbita que describe y del momento angular viene dado por:

$$T = \frac{2\,m\,S}{L}$$

9> Cuando un patinador sobre hielo se encoge, su momento angular se conserva. ¿Se conserva también su energía cinética?

10> Si dos partículas tienen el mismo momento lineal o cantidad de movimiento, ¿tendrán el mismo momento angular respecto del mismo punto? Razona la respuesta.

11> PAU Un satélite gira en torno a la Tierra describiendo una órbita elíptica, de forma que su perigeo se encuentra a una distancia del centro de la Tierra $1{,}02\,R_T$, siendo $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, mientras que en el apogeo su separación del centro de la Tierra es $1{,}06\,R_T$. Calcula la longitud del semieje mayor de la elipse y su excentricidad.
S: $a = 1{,}04\,R_T$; $e = 0{,}0192$

12> ¿Cómo influirá en la duración de un día el hecho de que todos los habitantes de la Tierra se concentraran en el Ecuador? ¿Y si lo hicieran en los polos?

13> ¿Cuánto tendría que reducirse R_T para que un día durase 2 h menos?

14> ¿Cómo explicas que un corcho que flota en el agua y que está saliendo por un desagüe, de una bañera por ejemplo, gira cada vez más deprisa a medida que se va aproximando al agujero del desagüe?

15> Si una partícula tiene movimiento rectilíneo, ¿respecto de qué puntos su momento angular es nulo?

16> Es difícil equilibrarse sobre una bicicleta inmóvil; en cambio, es fácil hacerlo cuando está en movimiento. Es más fácil mantener sobre la punta de un dedo una pelota de baloncesto que gira sobre sí misma que una pelota que no gira. ¿Ambos fenómenos tienen la misma explicación? ¿Cuál es?

17> PAU Calcula el momento angular de Júpiter suponiendo que tiene una masa 315 veces la de la Tierra, que su radio de órbita es 5,2 veces mayor que el radio de la órbita terrestre y el periodo es $3{,}74 \cdot 10^8$ s.
Datos: $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,400$ km.
S: $L_J = 1{,}9 \cdot 10^{43}$ kg m^2/s

18> Supongamos que por alguna razón la Tierra se contrae de modo que su radio se transforma en la mitad del que ahora tiene. ¿Cambiaría su velocidad de traslación alrededor del Sol?

19> PAU La distancia máxima desde la Tierra hasta el Sol es $1{,}521 \cdot 10^{11}$ m, y su máxima aproximación es $1{,}471 \cdot 10^{11}$ m. La velocidad orbital de la Tierra en perihelio es $3{,}027 \cdot 10^4$ m/s (Fig. 4.28). Calcula:
a) La velocidad orbital en el afelio.
b) La excentricidad de la órbita de la Tierra.
S: *a)* $v = 2{,}927 \cdot 10^4$ m/s; *b)* $e = 0{,}017$

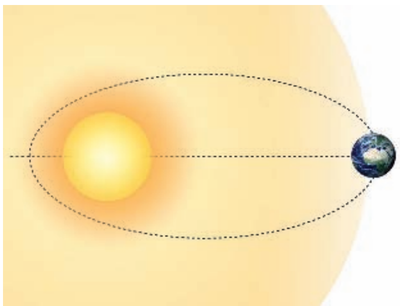


Fig. 4.28. *Órbita de la Tierra.*

20> ¿Es constante el módulo de la velocidad de traslación de los planetas? ¿Por qué? ¿En qué caso este módulo sería constante?

Cuestiones y problemas

21> PAU Un satélite de la Tierra describe una órbita elíptica. Las distancias máxima y mínima a la superficie de la Tierra son 3 200 km y 400 km respectivamente. Si la velocidad máxima del satélite es 5 250 m/s, halla la velocidad del satélite en los puntos de máximo y mínimo acercamiento. Datos: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m.

S: 5 250 m/s; 3 719 m/s

22> Dibuja la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol y las fuerzas que intervienen en el movimiento de aquél, así como la velocidad del planeta en diversos puntos de su órbita.

23> PAU Un planeta describe la órbita de la Figura 4.29. Establece una comparación en los puntos *A* y *B* de dicha órbita entre las siguientes magnitudes del planeta:

a) Velocidad de traslación.

b) Momento angular respecto del Sol.

c) Energía potencial.

d) Energía mecánica.

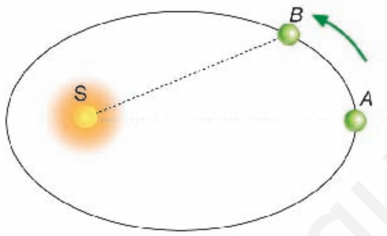


Fig. 4.29. *Órbita alrededor de una estrella.*

24> PAU Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio $1{,}00 \cdot 10^{11}$ m y periodo 2 años exactos. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada $1{,}8 \cdot 10^{11}$ m.

a) ¿Cuál es la masa de la estrella?

b) Calcula el periodo de la órbita del planeta 2.

c) Utilizando los Principios de Conservación del Momento Angular y de la Energía Mecánica, halla la velocidad del planeta 2 cuando se encuentra en la posición más cercana a la estrella.

S: *a)* $m = 1{,}49 \cdot 10^{29}$ kg; *b)* $T = 3{,}4$ años; *c)* $v = 1{,}16 \cdot 10^4$ m/s

25> PAU Se ha lanzado un satélite en una dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36 900 km/h desde una altitud de 500 km para situarlo en un apogeo de 66 700 km (medido desde el centro de la Tierra). ¿Qué velocidad tiene el satélite en esa posición? Datos: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m.

S: $\boldsymbol{v}$ = 3 817 km/h

26> Demuestra que el radio de la órbita de la Luna puede determinarse a partir del radio de la Tierra, la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre y el tiempo que tarda la Luna en dar una vuelta completa a la Tierra.

S: $r = \sqrt[3]{\dfrac{g\,R^2\,T^2}{4\,\pi^2}}$

27> ¿Qué puntos de la superficie terrestre tienen momento angular cero respecto del centro de la Tierra en el movimiento de rotación de esta?

28> PAU Suponiendo que la órbita de la Luna en torno a la Tierra tiene un radio de $3{,}84 \cdot 10^5$ km con un periodo de 27,3 días y que su masa es 0,012 veces la de la Tierra, calcula el momento angular de la Luna respecto del centro de la Tierra. Datos: $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.

S: $L_L = 2{,}8 \cdot 10^{34}$ kg m²/s

29> PAU Durante el vuelo Apolo XI, el astronauta M. Collins giró en torno a la Luna, en un módulo de mando, sobre una órbita aproximadamente circular. Suponiendo que el periodo de este movimiento fuera de 90 minutos exactos y que su órbita estuviera a 100 km por encima de la superficie lunar, calcula:

a) La velocidad con que recorría la órbita.

b) Su momento angular respecto del centro del satélite suponiendo que la masa del astronauta fuera de 80,0 kg.

Datos: $R_L = 1{,}738 \cdot 10^6$ m.

S: *a)* $v = 2{,}139 \cdot 10^3$ m/s; *b)* $L = 3{,}13 \cdot 10^{11}$ kg m²/s

30> PAU Un satélite artificial dista del centro de la Tierra $6{,}8 \cdot 10^6$ m en el perigeo y $7{,}2 \cdot 10^6$ m en el apogeo. Si la velocidad máxima del satélite es $3{,}5 \cdot 10^3$ m/s, calcula:

a) La velocidad mínima del satélite.

b) El semieje mayor de la órbita elíptica que describe.

c) La excentricidad de la elipse.

d) La energía mecánica del satélite.

e) A qué altura sobre la superficie terrestre se encuentra el satélite en su máxima aproximación.

Datos: $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m; masa del satélite = 2 500 kg.

S: *a)* $v_{min} = 3{,}3 \cdot 10^3$ m/s; *b)* $a = 7{,}0 \cdot 10^6$ m; *c)* $e = 0{,}029$; *d)* $E_m = -1{,}31 \cdot 10^{11}$ J; *e)* $h = 4 \cdot 10^5$ m

31> Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita elíptica cuya excentricidad es 0,2. Si en el perigeo dista del centro de la Tierra $7{,}2 \cdot 10^6$ m, ¿a qué distancia estará en el apogeo?

S: $\boldsymbol{d} = 1{,}08 \cdot 10^7$ m

Conceptos básicos

- **Fuerza central** es aquella fuerza que siempre está dirigida hacia el mismo punto, independientemente de la posición de la partícula sobre la cual actúa.

- **Momento de torsión** de una fuerza con respecto a un punto, $\vec{M}$, es el producto vectorial del vector $\vec{r}$ que une el punto con el punto de aplicación de la fuerza y el vector $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Su módulo es igual a $M = F\, r \operatorname{sen} \phi$, donde ϕ es el ángulo formado por $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

El momento de torsión asociado a una fuerza central es siempre cero, puesto que lo es el ángulo formado por $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

- **Momento angular** de una partícula con respecto a un punto, $\vec{L}$, es el producto vectorial del vector $\vec{r}$ (que une el punto con el punto de aplicación de $\vec{p}$) y el vector $\vec{p}$.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,(\vec{r} \times \vec{v})$$

Su módulo es $L = m\, v\, r \operatorname{sen} \beta$, donde β es el ángulo formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$.

- El **momento de la fuerza** que actúa sobre una partícula es igual a la variación del momento angular de dicha partícula.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\,(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} =$$

$$= \vec{v} \times m\,\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

En ausencia de momentos de torsión exteriores, el momento angular de un sistema permanece constante.

Fuerza central	Momento de torsión $\vec{M} = 0$	Momento angular L = constante
Fuerza no central	Momento de torsión $M = F\, r \operatorname{sen} \phi$	Momento angular $L = m\, v\, r \operatorname{sen} \beta$

- **Velocidad areolar** es la cantidad de área barrida por el radio vector de una partícula por la unidad de tiempo. Es igual a:

$$\frac{1}{2}\,|\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}\, r\, v \operatorname{sen} \alpha$$

De la expresión de la velocidad areolar se deduce que:

$$r_1\, v_1 = r_2\, v_2$$

- Según la **Segunda Ley de Kepler** se cumple que L es constante, por lo que toda partícula que se mueva bajo una fuerza central lo hace con una velocidad areolar constante.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{L}{m}$$

- La posición más próxima de un planeta al Sol se llama **perihelio** y la más alejada **afelio.**

Se llama excentricidad de una órbita, e, al cociente entre la distancia focal y el radio mayor de la órbita:

$$e = \frac{f}{R_M} = \frac{\sqrt{R_M^2 - R_m^2}}{R_M} =$$

$$= \frac{R_{afelio} - R_{perihelio}}{R_{afelio} + R_{perihelio}}$$