Potencia n-ésima de una matriz A^n

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula A^{23}

En primer lugar, lo que debemos hacer siempre en este tipo de ejercicios es calcular el producto A^2, A^3 y, si es necesario, A^4.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, como aún no me ha quedado claro la regla que sigue esta secuencia, realizaré A^4.

$$A^4 = A^3 . A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta manera, por lo que puedo deducir, el único valor que varía es el de a_{12} . Además corresponde con la secuencia "2n". Es decir, se cumple que para n= 1 el valor es 2, para n=2 el valor es 4, para n= 3 es 6…..

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, A^{23}:

$$A^{23} = \begin{pmatrix} 1 & 46 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular B^n:

Siendo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Repetimos el procedimiento del ejercicio anterior:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso podemos comprobar como se repite la secuencia:

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo:

B^{31}:

$$B^{31} = \begin{pmatrix} 1 & 31/7 & 31/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$