PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2018

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

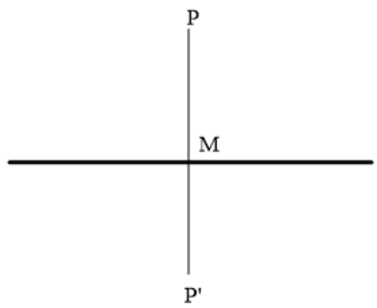
- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta *r* dada por $x-5=y=\dfrac{z+2}{-2}$.

a) Determina el punto simétrico de *P* respecto de *r*.
b) Calcula el punto de *r* que equidista de *P* y *Q*.
MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Pasamos la recta a paramétricas: $x-5=y=\dfrac{z+2}{-2}\Rightarrow\begin{cases}x=5+t\\ y=t\\ z=-2-2t\end{cases}$.

Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas $M(5+t,t,-2-2t)$. Queremos que el vector $\overrightarrow{PM}=(5+t-1,t-0,-2-2t+1)=(4+t,t,-1-2t)$ sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u}=(1,1,-2)$, luego, su producto escalar tiene que valer cero.

$$\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow(4+t,t,-1-2t)\cdot(1,1,-2)=0\Rightarrow -6-6t=0\Rightarrow t=-1$$

Luego, el punto *M* es: $M=(4,-1,0)$.

Si llamamos al punto simétrico $P'=(a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,0,-1)+(a,b,c)}{2}=(4,-1,0)\Rightarrow P'=(7,-2,1)$$

b) Cualquier punto *A* de la recta tiene de coordenadas: $A(5+t,t,-2-2t)$. Buscamos el que equidista de *P* y *Q*, por lo tanto, el módulo del vector $\overrightarrow{PA}=(4+t,t,-1-2t)$ tiene que ser igual al módulo del vector $\overrightarrow{QA}=(3+t,t-1,-3-2t)$

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|=\left|\overrightarrow{QA}\right|\Rightarrow\sqrt{(4+t)^2+t^2+(-1-2t)^2}=\sqrt{(3+t)^2+(t-1)^2+(-3-2t)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16+t^2+8t+t^2+1+4t^2+4t=9+t^2+6t+t^2+1-2t+9+4t^2+12t\Rightarrow$$

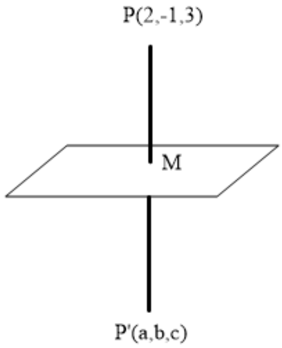
$$\Rightarrow 6t^2+12t+17=6t^2+16t+19\Rightarrow -4t=2\Rightarrow t=-\frac{1}{2}$$

Luego, el punto A de la recta que equidista de P y Q es: $A=\left(5-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-2+2\cdot\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{9}{2},-\dfrac{1}{2},-1\right)$

Considera el punto $P(2,-1,3)$ y el plano π de ecuación $3x+2y+z=5$.
a) Calcula el punto simétrico de P respecto de π.
b) Calcula la distancia de P a π.
MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Con el vector normal del plano $\vec{n}=(3,2,1)$ y el punto *P*, calculamos la recta que pasa por *P* y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -1+2t \\ z = 3+t \end{cases}$$

Calculamos el punto *M*, punto de corte de la recta con el plano

$$3\cdot(2+3t)+2\cdot(-1+2t)+(3+t)=5 \Rightarrow 14t=-2 \Rightarrow t=-\frac{1}{7}$$

Luego, el punto *M* es: $M=\left(2-\frac{3}{7},-1-\frac{2}{7},3-\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M=\frac{P+P'}{2} \Rightarrow \left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right)=\frac{(2,-1,3)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{22}{7}=a+2 \Rightarrow a=\frac{8}{7} \\ -\frac{18}{7}=b-1 \Rightarrow b=-\frac{11}{7} \\ \frac{40}{7}=c+3 \Rightarrow c=\frac{19}{7} \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $P'\left(\frac{8}{7},-\frac{11}{7},\frac{19}{7}\right)$

b) La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PM}=\left(\frac{11}{7}-2,-\frac{9}{7}+1,\frac{20}{7}-3\right)=\left(-\frac{3}{7},-\frac{2}{7},-\frac{1}{7}\right)$

$$d(P,\pi)=\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2+\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{7}=0'534\ u$$

Se considera el plano π de ecuación $x+2y+z=6$.
a) Determina la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.
b) Halla el punto simétrico del origen de coordenadas con respecto de π.
c) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Con el vector normal del plano $\vec{n}=(1,2,1)$ y el punto $O=(0,0,0)$, calculamos la recta que pasa por *O* y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$$

b) Calculamos el punto *M*, punto de corte de la recta con el plano

$$1\cdot(t)+2\cdot(2t)+1\cdot(t)=6 \Rightarrow 6t=6 \Rightarrow t=1$$

Luego, el punto *M* es: $M=(1,2,1)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M=\frac{O+O'}{2} \Rightarrow (1,2,1)=\frac{(0,0,0)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=2 \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $O'(2,4,2)$.

c) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

Corte con el eje OX $\Rightarrow x=6 \Rightarrow A(6,0,0)$
Corte con el eje OY $\Rightarrow y=3 \Rightarrow B(0,3,0)$
Corte con el eje OZ $\Rightarrow z=6 \Rightarrow C(0,0,6)$

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, $\overrightarrow{OA}=(6,0,0)$; $\overrightarrow{OB}=(0,3,0)$; $\overrightarrow{OC}=(0,0,6)$, es decir:

$$V=\frac{1}{6}\ \textit{Valor absoluto de} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{108}{6}=18\ u^3$$

Considera las rectas *r* y *s* dadas por

$$\boldsymbol{r \equiv x-2=y-2=z} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x=4+t \\ y=4+t \\ z=mt \end{cases}}$$

a) Determina m para que *r* y *s* sean paralelas.
b) Halla, si existe, un valor de *m* para el que ambas rectas sean la misma.
c) Para $\boldsymbol{m=1}$, calcula la ecuación del plano que contiene a *r* y a *s*
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a paramétricas $r \equiv x-2=y-2=z \Rightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=2+t \Rightarrow A=(2,2,0) \ ; \ \vec{u}=(1,1,1) \\ z=t \end{cases}$

$$s \equiv \begin{cases} x=4+t \\ y=4+t \Rightarrow B=(4,4,0) \ ; \ \vec{v}=(1,1,m) \\ z=mt \end{cases}$$

Si las rectas son paralelas, los vectores tienen que ser linealmente dependientes, es decir, sus componentes tienen que ser proporcionales.

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{m} \Rightarrow m=1$$

b) Vemos que el punto $B=(4,4,0)$ de la recta *s*, no verifica la ecuación de la recta *r*

$$4-2=4-2\neq 0$$

Por lo tanto, no hay ningún valor de *m* para el cual las rectas sean coincidentes.

c) El plano que nos piden viene definido por el punto $A=(2,2,0)$ y los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{AB}=(2,2,0)$. Luego, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & 2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2x+2y-8=0 \Rightarrow x-y+4=0$$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$

a) Estudia y determina la posición relativa de *r* y s.

b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta *r*: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x - 2z = -1 \end{cases}$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x - 2z = -1 \\ 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$ y calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_3]{F_2 - 6F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 3$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_3]{F_2 - 6F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 4$$

Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 4, las dos rectas se cruzan.

b) Calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (-1, 0, -1) \\ \vec{u} = (2, 1, 3) \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-4, -1, 0) \\ \vec{v} = (3, 2, 1) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula: $d(r,s) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})\right|}{\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right|} = \left| \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} \right| = \dfrac{9}{\sqrt{75}} = 1'039\,u$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z$ y $s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}$

a) Halla los valores de m y n para los que r y s se corten perpendicularmente.

b) Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s.

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + mt \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (1,-1,0) \; ; \vec{u} = (2,m,1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 - ns \\ y = -3 + s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (-2,-3,0) \; ; \vec{v} = (-n,1,1)$$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, luego: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -2n + m + 1 = 0$

Las dos rectas se tienen que cortar en un punto, luego: $Rango\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = Rango\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right) = 2$, por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 3 + 4 = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 7 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{r} -2n + m + 1 = 0 \\ -3m + 2n + 7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow m = 4 \; ; \; n = \frac{5}{2}$$

b) Estudiamos la posición de las rectas cuando $m = 3$ y $n = 1$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (1,-1,0) \; ; \vec{u} = (2,3,1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 - s \\ y = -3 + s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (-2,-3,0) \; ; \vec{v} = (-1,1,1)$$

Calculamos el $Rango\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -9 + 2 + 3 + 4 = 0 \Rightarrow Rango = 2 \Rightarrow \text{ Se cortan en un punto}$$

Luego, el plano viene determinado por el punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+1 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 3y + 5z - 5 = 0$$