

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{array} \right\}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

a) Discútelo según los valores del parámetro m .

b) Resuelve el sistema para $m = -2$.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{vmatrix} = -m+3=0 \Rightarrow m=3$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

$$\text{Si } m=3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Si } m=3 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

	R(A)	R(M)	
$m=3$	2	3	S. Incompatible
$m \neq 3$	3	3	S. Compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $m = -2$:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + y + z = -6 \\ 2x + 4y - 3z = 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{F_2-F_1} \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ -y = -9 \\ -5z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -\frac{73}{5}; y = 9; z = -\frac{2}{5}$$

a) Justifica que es posible hacer un pago de 34'50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:
 utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros
 se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas
 tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros
 juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si llamamos

x = número de monedas de 50 céntimos

y = número de monedas de 1 €

z = número de monedas de 2 €

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 0'5x + y + 2z = 34'5 \\ x + y + z = 30 \\ y = x + z \end{array} \right\}$$

Ordenamos y resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ 0'5x + y + 2z = 34'5 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\substack{-0'5F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3}} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ 0'5y + 1'5z = 19'5 \\ -2y = -30 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 15 ; z = 8 ; x = 7$$

Luego, la solución es única y es utilizando 7 monedas de 50 céntimos, 15 monedas de 1 € y 8 monedas de 2 €.

b) Planteamos y resolvemos el nuevo sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ 0'5x + y + 2z = 35 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\substack{-0'5F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3}} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ 0'5y + 1'5z = 20 \\ -2y = -30 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 15 ; z = \frac{25}{3} ; x = \frac{20}{3}$$

Esta solución no es posible, ya que el número de monedas tiene que ser un número entero positivo, no puede ser decimal.

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Discute el rango de A según los valores del parámetro λ .

b) Para $\lambda = -2$, estudia y resuelve el sistema dado por $AX = B$.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^3 - 6\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \lambda = -2$$

Calculamos el rango de la matriz A .

$$\text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 1$$

$$\text{Para } \lambda = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

Para $\lambda \neq 1$ y $-2 \Rightarrow R(A) = 3$

b) Calculamos el rango de la matriz ampliada para $\lambda = -2$

$$\lambda = -2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$$

Luego, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - 2z = -1 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{-1 + 3z}{6}; y = \frac{2 - 3z}{3}; z = z$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m .

b) Resuélvelo para $m = 1$. Para dicho valor de m , calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - m + m = 0 \Rightarrow R(A) < 3$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow R(A) = 2$

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m + m - m^2 - m^2 = 2m - 2m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = 1$$

Si $m = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

Si $m = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

	R(A)	R(M)	
$m = 0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m = 1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m \neq 0$ y 1	2	3	S. Incompatible

b) Resolvemos el sistema para $m = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -2z ; y = 1 + z ; z = z$$

Si $z = 2 \Rightarrow x = -4 ; y = 3$