

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2A \cdot B$

b) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = 2B^t + I_2$

SOCIALES II. 2018 JUNIO. EJERCICIO 1 OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + A \cdot B + B \cdot A$

En general, el producto de matrices no es conmutativo, con lo cual $A \cdot B \neq B \cdot A$, y por lo tanto, la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2A \cdot B$, en general no es cierta

Vamos a comprobarlo para estas matrices:

$$(A+B)^2 = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + B^2 + 2A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Vemos que: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) Resolvemos la ecuación matricial: $X \cdot A = 2B^t + I_2$

$$X \cdot A = 2B^t + I_2 \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C = (-2 \ -2)$

a) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

$$B + 2C \cdot A \quad A - (B \cdot C)^t$$

b) Resuelva la ecuación matricial $\frac{1}{5}(B + A \cdot X) = C^t$

SOCIALES II. 2018 RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$B_{(2,1)} + 2C_{(1,2)} \cdot A_{(2,2)}$ No se puede, ya que $2C_{(1,2)} \cdot A_{(2,2)}$ da una matriz de orden (1,2), que no se puede sumar con la matriz B de orden (2,1).

$$A - (B \cdot C)^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot (-2 \ -2) \right]^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -12 & -12 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{5} \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6a \\ 2a+4b \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{5} \left[\begin{pmatrix} -4+6a \\ 6+2a+4b \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -4+6a \\ 6+2a+4b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -4+6a = -10 \\ 6+2a+4b = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1 ; b = -\frac{7}{2} \\ \Rightarrow & \end{aligned}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Razone qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^2$

SOCIALES II. 2018 RESERVA 2. EJERCICIO 1 OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $(A \cdot P \cdot B^t) \Rightarrow (2,2)(x,y)(3,2) \Rightarrow P(x,y) = (2,3)$. La matriz resultante es de orden $(2,2)$.

$(Q \cdot A \cdot C) \Rightarrow (x,y)(2,2)(2,3) \Rightarrow Q(x,y) = (3,2)$. La matriz resultante es de orden $(3,3)$.

b) Resolvemos la ecuación matricial: $A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^2$

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^2 \Rightarrow A \cdot X = A^2 + 2B \cdot C^t \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}A^2 + 2A^{-1}B \cdot C^t \Rightarrow X = A + 2A^{-1}B \cdot C^t$$

Calculamos la inversa

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X = A + 2A^{-1}B \cdot C^t &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 8 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30 & -28 \\ -17 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & -26 \\ -20 & -15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Resuelva el sistema de ecuaciones matriciales:

$$2A - 5B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} ; 3A - B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial

$$X \cdot C - D^2 = I_2$$

SOCIALES II. 2018 RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos el sistema matricial

$$\left. \begin{array}{l} 2A - 5B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ 3A - B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2A - 5B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ -15A + 5B = \begin{pmatrix} -20 & -15 \\ -20 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow -13A = \begin{pmatrix} -13 & -13 \\ -13 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2A - 5B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ 3A - B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -6A + 15B = \begin{pmatrix} -21 & -6 \\ -21 & -24 \end{pmatrix} \\ 6A - 2B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow 13B = \begin{pmatrix} -13 & 0 \\ -13 & -26 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+b & -2a+b \\ 3c+d & -2c+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+b & -2a+b \\ 3c+d & -2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+b & -2a+b \\ 3c+d & -2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+b = 0 \\ -2a+b = 2 \\ 3c+d = -2 \\ -2c+d = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{2}{5}; b = \frac{6}{5}; c = -\frac{6}{5}; d = \frac{8}{5}$$

Luego la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Si A es una matriz con tres filas y dos columnas, determine razonadamente la dimensión que deben tener las matrices B , C y D para que se puedan efectuar las siguientes operaciones:

$$2A - 3B \quad A \cdot A^t - C^2 \quad A \cdot D$$

SOCIALES II. 2018 RESERVA 4. EJERCICIO 1 OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+3b \\ a-5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3b=4 \\ a-5b=1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{23}{13}; b = \frac{2}{13}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} \frac{23}{13} \\ \frac{2}{13} \end{pmatrix}$

b) Si A tiene dimensión $(3,2)$, la matriz B debe tener también dimensión $(3,2)$ para que se pueda efectuar la operación $2A - 3B$

Si A tiene dimensión $(3,2)$ entonces, $A \cdot A^t$ tiene dimensión $(3,3)$, luego C debe tener dimensión $(3,3)$ para que se pueda efectuar la operación $A \cdot A^t - C^2$.

Para que se pueda efectuar la operación $A \cdot D$, la matriz D debe tener 2 filas y cualquier número de columnas.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule $A^{2018} + A^{2019}$

b) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + B \cdot B^t = 2A$

SOCIALES II. 2018 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot I = A$$

$$A^{2018} = (A^2)^{1009} = (I)^{1009} = I$$

$$A^{2019} = A^{2018} \cdot A = I \cdot A = A$$

$$\text{Calculamos: } A^{2018} + A^{2019} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

En el apartado anterior ya habíamos visto que $A \cdot A = I \Rightarrow A = A^{-1}$

Resolvemos la ecuación matricial

$$X \cdot A + B \cdot B^t = 2A \Rightarrow X \cdot A = 2A - B \cdot B^t \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (2A - B \cdot B^t) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = 2I - B \cdot B^t \cdot A^{-1}$$

$$\begin{aligned} X = 2I - B \cdot B^t \cdot A^{-1} &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$