

Resuelve

1. Expresa con nuestra notación el siguiente polinomio dado con la nomenclatura de Diofanto:

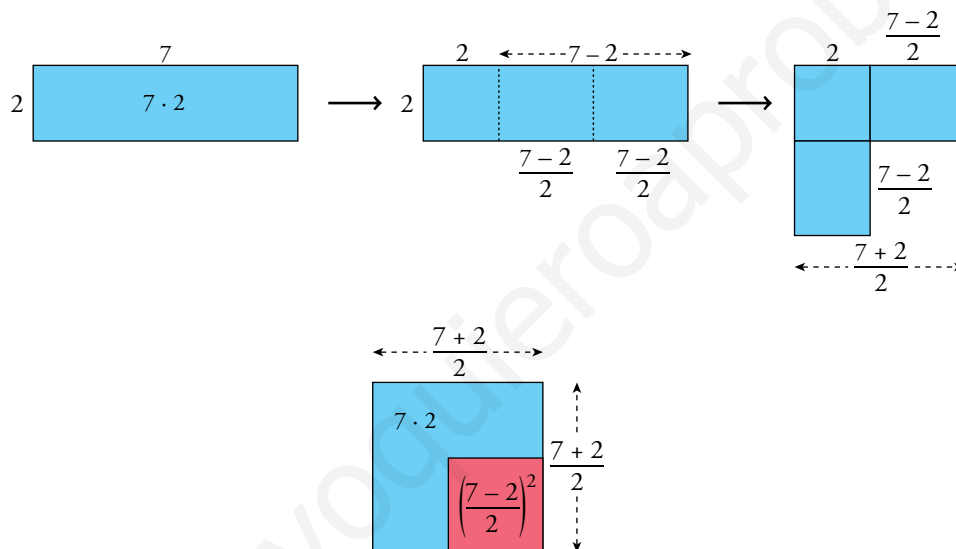
ss3 s5 M c8 x9 u1

$$3x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 9x - 1$$

2. Expresa con la nomenclatura de Diofanto: $-2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

c5 u8 M ss2 s3 x6

3. Repite gráficamente el razonamiento utilizado por Pitágoras para demostrar la igualdad de arriba, tomando $a = 7$ y $b = 2$.



$$\left. \begin{array}{l} A_{\text{azul}}: 7 \cdot 2 \\ A_{\text{roja}}: \left(\frac{7-2}{2}\right)^2 \\ A_{\text{azul + roja}}: \left(\frac{7+2}{2}\right)^2 \end{array} \right\} A_{\text{azul}} = A_{\text{azul + roja}} - A_{\text{roja}} \rightarrow 7 \cdot 2 = \left(\frac{7+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{7-2}{2}\right)^2 \rightarrow 14 = 14$$

2 Regla de Ruffini

Página 38

1. Calcula el cociente y el resto de la división de $x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ entre los siguientes polinomios:

a) $x - 1$

b) $x + 1$

c) $x - 2$

d) $x - 4$

e) $x + 4$

f) $x - 3$

Indica en cada caso si la división es entera o exacta.

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{a)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & & 1 & 4 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Se trata de una división exacta.

Cociente: $x^3 + 4x^2 + x + 4$

Resto: 0

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{b)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & & -1 & -2 & 5 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -5 & 8 & -12 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 2x^2 - 5x + 8$

Resto: -12

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{c)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & & 2 & 10 & 14 & 34 \\ \hline & 1 & 5 & 7 & 17 & 30 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 5x^2 + 7x + 17$

Resto: 30

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{d)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 4 & & 4 & 28 & 100 & 412 \\ \hline & 1 & 7 & 25 & 103 & 408 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 7x^2 + 25x + 103$

Resto: 408

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{e)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ -4 & & -4 & 4 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Se trata de una división exacta.

Cociente: $x^3 - x^2 + x - 1$

Resto: 0

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{f)} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 3 & & 3 & 18 & 45 & 144 \\ \hline & 1 & 6 & 15 & 48 & 140 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 6x^2 + 15x + 48$

Resto: 140

2. Realiza la división de $P(x) = 4x^3 + 12x^2 + 5x - 6$ entre cada uno de los siguientes polinomios y expresa el resultado así: cociente + $\frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$.

a) $x - 1$

b) $2x - 1$

c) $x + 2$

d) $2x + 4$

e) $2x + 3$

f) $x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{a)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 1 & & 4 & 16 & 21 \\ \hline & 4 & 16 & 21 & \boxed{15} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 4x^2 + 16x + 21 + \frac{15}{x - 1}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{b)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 1/2 & & 2 & 7 & 6 \\ \hline & 4 & 14 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x - 1} = \frac{4x^2 + 14x + 12}{2} = 2x^2 + 7x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{c)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -2 & & -8 & -8 & 6 \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x + 2} = 4x^2 + 4x - 3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{d)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -2 & & -8 & -8 & 6 \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x + 4} = \frac{4x^2 + 4x - 3}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{e)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -3/2 & & -6 & -9 & 6 \\ \hline & 4 & 6 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x + 3} = \frac{4x^2 + 6x - 4}{2} = 2x^2 + 3x - 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{f)} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 2 & & 8 & 40 & 90 \\ \hline & 4 & 20 & 45 & \boxed{84} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x - 2} = 4x^2 + 20x + 45 + \frac{84}{x - 2}$$

Página 39

3. Utiliza la regla de Ruffini para hallar $P(a)$ en los siguientes casos:

a) $P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2x - 24$, $a = 2$, $a = -5$, $a = 10$

b) $P(x) = 3x^3 - 8x^2 + 3x$, $a = -3$, $a = 1$, $a = 8$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ & & 14 & 28 & 46 & 96 \\ \hline & 7 & 14 & 23 & 48 & 72 \end{array} \quad P(2) = 72$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ & & -35 & 175 & -850 & 4240 \\ \hline & 7 & -35 & 170 & -848 & 4216 \end{array} \quad P(-5) = 4216$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 10 & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ & & 70 & 700 & 6950 & 69520 \\ \hline & 7 & 70 & 695 & 6952 & 69496 \end{array} \quad P(10) = 69496$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 3 & -8 & 3 & 0 \\ & & -9 & 51 & -162 \\ \hline & 3 & -17 & 54 & -162 \end{array} \quad P(-3) = -162$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -8 & 3 & 0 \\ & & 3 & -5 & -2 \\ \hline & 3 & -5 & -2 & -2 \end{array} \quad P(1) = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 8 & 3 & -8 & 3 & 0 \\ & & 24 & 128 & 1048 \\ \hline & 3 & 16 & 131 & 1048 \end{array} \quad P(8) = 1048$$

3 Raíz de un polinomio. Búsqueda de raíces

Página 41

1. Indica, sin realizar las operaciones, si $x = -3$ puede ser raíz de cada uno de estos polinomios:

a) $P(x) = x^2 - x - 12$

b) $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$

c) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$

d) $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

En caso afirmativo, comprueba si es o no raíz.

a) $x = -3$ puede ser raíz de $P(x) = x^2 - x - 12$, puesto que su término independiente, -12 , es múltiplo de -3 . Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -3 & & -3 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 0 \end{array} \quad x = -3 \text{ sí es raíz de } P(x).$$

b) $x = -3$ no puede ser raíz de $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$, puesto que su término independiente, $+8$, no es múltiplo de -3 .

c) $x = -3$ puede ser raíz de $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$, puesto que su término independiente, -27 , es múltiplo de -3 . Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -3 & & -3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -12 \end{array} \quad x = -3 \text{ no es raíz de } P(x).$$

d) $x = -3$ puede ser raíz de $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$, puesto que su término independiente, $+3$, es múltiplo de -3 . Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & +1 & +3 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad x = -3 \text{ sí es raíz de } P(x).$$

2. Indica las posibles raíces enteras de cada uno de los polinomios del ejercicio anterior. Comprueba cuáles lo son.

a) $P(x) = x^2 - x - 12$

Las posibles raíces enteras son: $+1; -1; +2; -2; +3; -3; +4; -4; +6; -6; +12; -12$.

Comprobamos cuáles lo son:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 1 & & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -12 \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -10 \end{array}$$

$x = -1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -10 \end{array}$$

$x = 2$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -2 & & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & -6 \end{array}$$

$x = -2$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 3 & & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -6 \end{array}$$

$x = 3$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -3 & & -3 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$x = -3$ sí es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 4 & & 4 & 12 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$x = 4$ sí es raíz.

Como el polinomio es de grado 2 y ya hemos encontrado sus dos raíces, el resto no serán raíces.

b) $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$

Las posibles raíces enteras son: +1; -1; +2; -2; +4; -4; +8; -8.

Comprobamos cuáles lo son:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & 1 & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 2 & 10 \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & -1 & 1 & -3 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -4 & 12 \end{array}$$

$x = -1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & 2 & 4 & 12 & 22 \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 11 & 30 \end{array}$$

$x = 2$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & -2 & 4 & -12 & 26 \\ \hline & 1 & -2 & 6 & -13 & 34 \end{array}$$

$x = -2$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & 4 & 16 & 72 & 284 \\ \hline & 1 & 4 & 18 & 71 & 292 \end{array}$$

$x = 4$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & -4 & 16 & -72 & 292 \\ \hline & 1 & -4 & 18 & -73 & 300 \end{array}$$

$x = -4$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 8 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & 8 & 64 & 528 & 4216 \\ \hline & 1 & 8 & 66 & 527 & 4224 \end{array}$$

$x = 8$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -8 & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ & & -8 & 64 & -528 & 4232 \\ \hline & 1 & -8 & 66 & -529 & 4240 \end{array}$$

$x = -8$ no es raíz.

El polinomio no tiene raíces enteras dado que ya no hay más posibilidades.

c) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$

Las posibles raíces enteras son: +1; -1; +3; -3; +9; -9; +27; -27.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & 1 & 4 & -1 \\ \hline & 1 & 4 & -1 & -28 \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & -1 & -2 & 7 \\ \hline & 1 & 2 & -7 & -20 \end{array}$$

$x = -1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & 3 & 18 & 39 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & 12 \end{array}$$

$x = 3$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & -3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -12 \end{array}$$

$x = -3$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 9 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & 9 & 108 & 927 \\ \hline & 1 & 12 & 103 & 900 \end{array}$$

$x = 9$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -9 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & -9 & 54 & -441 \\ \hline & 1 & -6 & 49 & -468 \end{array}$$

$x = -9$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 27 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & 27 & 810 & 21735 \\ \hline & 1 & 30 & 805 & 21708 \end{array}$$

$x = 27$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -27 & 1 & 3 & -5 & -27 \\ & & -27 & 648 & -17361 \\ \hline & 1 & -24 & 643 & 17388 \end{array}$$

$x = -27$ no es raíz.

El polinomio no tiene raíces enteras.

d) $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

Las posibles raíces enteras son: +1; -1; +3; -3.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ & & 1 & 4 & 5 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 8 \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ & & -1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}$$

$x = -1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ & & 3 & 18 & 57 \\ \hline & 1 & 6 & 19 & 60 \end{array}$$

$x = 3$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$x = -3$ sí es raíz.

Como ya hemos probado todas las posibilidades, el polinomio solo tiene una raíz entera, $x = -3$.

- 3. El polinomio $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$ es divisible por $x - a$ para dos valores enteros de a .**

Localízalos y da el cociente en ambos casos.

El polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$ es divisible por $(x - 2)$ y por $(x + 3)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 \\ & & 2 & 10 & 16 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 6 & 0 \end{array} \quad \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12}{x - 2} = x^3 + 5x^2 + 8x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 \\ & & -3 & 0 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{array} \quad \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12}{x + 3} = x^3 - 2x - 4$$

- 4. Comprueba que el polinomio $x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 10$ no es divisible por $x - a$ para ningún valor de a entero.**

Las posibles raíces enteras de $x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 10$ son: $+1, -1; +2; -2; +5; -5; +10$ y -10 .
Comprobamos que ninguna de ellas lo es:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & 1 & 2 & 9 & 11 \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 11 & 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -1 & 0 & -7 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 7 & -5 & 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & 2 & 6 & 26 & 56 \\ \hline & 1 & 3 & 13 & 28 & 66 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -2 & 2 & -18 & 32 \\ \hline & 1 & -1 & 9 & -16 & 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & 5 & 30 & 185 & 935 \\ \hline & 1 & 6 & 37 & 187 & 945 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -5 & 20 & -135 & 665 \\ \hline & 1 & -4 & 27 & -133 & 675 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 10 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & 10 & 110 & 1170 & 11720 \\ \hline & 1 & 11 & 117 & 1172 & 11730 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -10 & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ & & -10 & 90 & -970 & 9680 \\ \hline & 1 & -9 & 97 & -968 & 9690 \end{array}$$

- 5. Inventa un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 3, -2 y -1.**

Una posible solución es: $P(x) = (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) = x^3 - 7x - 6$

- 6. Inventa un polinomio de cuarto grado que no tenga raíces.**

Una posible solución es: $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

- 7. Inventa un polinomio de cuarto grado que tenga solo dos raíces: $x = 2$ y $x = -3$.**

Una posible solución es: $P(x) = (x^2 + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$

- 8. Inventa un polinomio de segundo grado que tenga como raíz doble $x = -3$.**

Una posible solución es: $P(x) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

- 9. Inventa un polinomio que no tenga raíces:**

a) Que sea de grado 5.

b) Que sea de 4.º grado.

a) Un polinomio de grado impar seguro que tiene alguna raíz.

b) Una posible solución: $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

4 Factorización de polinomios

Página 43

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2 + 2x - 8$

b) $3x^5 - 48x$

c) $2x^3 + x^2 - 5x + 12$

d) $x^3 - 7x^2 + 8x + 16$

e) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x$

f) $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

$$a) x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 8 \cdot 3}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} = \begin{cases} 4/3 \\ -2 \end{cases}$$

$$3x^2 + 2x - 8 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 2) = (3x - 4)(x + 2)$$

$$b) 3x^5 - 48x = x(3x^4 - 48) = 3x(x^4 - 16) = 3x(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$$

c) Probamos con los divisores enteros de 12 y no encontramos ningún resto cero.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -5 & 12 \\ -3 & & -6 & 15 & -30 \\ \hline & 2 & -5 & 10 & -18 \end{array}$$

No podemos factorizar el polinomio $2x^3 + x^2 - 5x + 12$.

$$d) \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 8 & 16 \\ 4 & & 4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (x - 4)^2(x + 1)$$

$$e) x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x^3 + 2x^2 - 23x - 60)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -23 & -60 \\ 5 & & 5 & 35 & 60 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} -4 \\ -3 \end{cases}$$

$$x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x - 5)(x + 4)(x + 3)$$

$$f) \begin{array}{r|rrrrr} & 9 & -36 & 26 & 4 & -3 \\ 1 & & 9 & -27 & -1 & 3 \\ \hline & 9 & -27 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & & 27 & 0 & -3 & \\ \hline & 9 & 0 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$9x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

$$9x^2 - 1 = (3x + 1)(3x - 1)$$

$$9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(x - 3)(3x + 1)(3x - 1)$$

5 Divisibilidad de polinomios

Página 45

1. Razona si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 7x^2$ y $Q(x) = x^3 - 7x$

b) $P(x) = x^3 - 7x^2$ y $Q(x) = x^2 - 7x$

c) $P(x) = x^4 - 3x - 10$ y $Q(x) = x - 2$

a) $\left. \begin{array}{l} P(x) = x^2(x - 7) \\ Q(x) = x(x^2 - 7) \end{array} \right\}$ No existe ninguna relación de divisibilidad.

b) $\left. \begin{array}{l} P(x) = x^2(x - 7) \\ Q(x) = x(x - 7) \end{array} \right\}$ $Q(x)$ divide a $P(x)$.

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & -3 & -10 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} P(x) = (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 5) \\ Q(x) = x - 2 \end{array} \right\}$ $Q(x)$ divide a $P(x)$.

2. Busca dos polinomios de 3.º grado que sean divisibles por $x - 5$ y x . Calcula su máx.c.d. y su mín.c.m.

Por ejemplo:

$$x(x - 5)(x - 2) = x^3 - 7x^2 + 10x$$

$$x(x - 5)x = x^3 - 5x^2$$

$$\text{máx.c.d. } [x^3 - 7x^2 + 10x, x^3 - 5x^2] = x(x - 5)$$

$$\text{mín.c.m. } [x^3 - 7x^2 + 10x, x^3 - 5x^2] = x^2(x - 5)(x - 2)$$

3. Indica cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles. Descompón en factores los que no lo sean.

a) $x^2 - 3x + 2$

b) $x^2 - 5x + 6$

c) $3x^2 + 5x$

d) $3x^2 - 5x - 2$

e) $3x^2 - 5x + 3$

f) $3x^3 - 5x^2 + 3x$

a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

b) $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

c) $3x^2 + 5x = x(3x + 5)$

d) $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{matrix} 2 \\ -1/3 \end{matrix}$

$$3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$$

e) $x = \frac{5 \pm \sqrt{26 - 36}}{6}$ No tiene solución.

$$3x^2 - 5x + 3 \text{ es irreducible.}$$

f) $3x^3 - 5x^2 + 3x = x(3x^2 - 5x + 3)$

$$3x^2 - 5x + 3 \text{ es irreducible (apartado e).}$$

4. Halla mentalmente (sin operar) el máx.c.d. y el mín.c.m. de los siguientes pares de polinomios:

a) $x^2 - 1$ y $(x + 1)^2$

b) $x^2 + x$ y $x^2 - x$

c) $x^3 - x$ y $x^2 - 1$

d) $x^2 + 1$ y x^2

a) máx.c.d. = $(x + 1)$

b) máx.c.d. = x

mín.c.m. = $(x + 1)^2(x - 1)$

mín.c.m. = $x(x + 1)(x - 1)$

c) máx.c.d. = $(x + 1)(x - 1)$

d) máx.c.d. = 1

mín.c.m. = $x(x + 1)(x - 1)$

mín.c.m. = $(x^2 + 1)x^2$

5. Halla el máx.c.d. y el mín.c.m. de P y Q en cada caso:

a) $P(x) = x^2 - 9$, $Q(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$, $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2$

c) $P(x) = x(x - 3)^2(x + 5)$, $Q(x) = x^3(x - 3)(x^2 + x + 2)$

a) $P(x) = (x + 3)(x - 3)$ $Q(x) = (x - 3)^2$

máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x - 3$

mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x - 3)^2(x + 3)$

b) $P(x) = x(x^2 - 7x + 12) = x(x - 4)(x - 3)$ $Q(x) = x^2(x - 4)(x + 1)$

máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x(x - 4)$

mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 4)(x - 3)(x + 1)$

c) $P(x) = x(x - 3)^2(x + 5)$ $Q(x) = x^3(x - 3)(x^2 + x + 2)$

máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x(x - 3)$

mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^3(x - 3)^2(x + 5)(x^2 + x + 2)$

6. $P(x) = (x - 2)^2 x^2$. Busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

a) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x^2 - 2x$

b) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x - 2)^2 x^2 (x + 5)$

$P(x) = (x - 2)^2 x^2$

Si máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x^2 - 2x = x(x - 2)$ y

mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x - 2)^2 x^2 (x + 5)$,

debe ser $Q(x) = x(x - 2)(x + 5)$

6 Fracciones algebraicas

Página 46

Cálculo mental

1. Simplifica estas fracciones:

a) $\frac{2x}{x^2+x}$ b) $\frac{x+1}{(x+1)^2}$ c) $\frac{x+1}{x^2-1}$ d) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}$ e) $\frac{x^2-2x}{x^2-3x}$ f) $\frac{x^3-4x^2}{x^3}$

a) $\frac{2}{x+1}$ b) $\frac{1}{x+1}$ c) $\frac{1}{x-1}$ d) $x-3$ e) $\frac{x-2}{x-3}$ f) $\frac{x-4}{x}$

2. Di si cada par de fracciones son equivalentes o no.

a) $\frac{x-3}{x^2-3x}$ y $\frac{x}{x^2}$ b) $\frac{x}{x-1}$ y $\frac{x-1}{x}$ c) $\frac{1}{x-1}$ y $\frac{x+1}{x^2-1}$

a) $\frac{x-3}{x^2-3x} = \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} \rightarrow$ Son equivalentes.

b) $\frac{x}{x-1} \neq \frac{x-1}{x} \rightarrow x^2 \neq (x-1)^2$. No son equivalentes.

c) $\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x^2-1} \rightarrow$ Son equivalentes.

1. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{2x^2-6x}{4x^3-2x}$ b) $\frac{(x-3)^2 x(x+3)}{(x-3)x^2(x+2)}$ c) $\frac{x^3+3x^2+x+3}{x^3+3x^2}$ d) $\frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-x^2-14x+24}$

a) $\frac{2x^2-6x}{4x^3-2x} = \frac{2x(x-3)}{2x(2x^2-1)} = \frac{x-3}{2x^2-1}$

b) $\frac{(x-3)^2 x(x+3)}{(x-3)x^2(x+2)} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+2)}$

c) $\frac{x^3+3x^2+x+3}{x^3+3x^2} = \frac{(x+3)(x^2+1)}{x^2(x+3)} = \frac{x^2+1}{x^2}$

d) $\frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-x^2-14x+24} = \frac{x(x^2-5x+6)}{x^3-x^2-14x+24} = \frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+4)} = \frac{x}{x+4}$

2. Comprueba si cada par de fracciones son equivalentes:

a) $\frac{x^3-x}{x^3+x^2}$ y $\frac{3x-3}{3x}$ b) $\frac{(x+5)^2}{x^3+10x^2+25x}$ y $\frac{x-3}{3x-x^2}$

a) $\frac{x^3-x}{x^3+x^2} = \frac{x(x^2-1)}{x(x^2+x)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x} = \frac{3x-3}{3x}$. Son equivalentes.

b) $\frac{(x+5)^2}{x^3+10x^2+25x} = \frac{(x+5)^2}{x(x+5)^2} = \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x(x-3)} = \frac{x-3}{x^2-3x} \neq \frac{x-3}{3x-x^2}$. No son equivalentes.

Página 47

Cálculo mental

1. Reduce a común denominador.

a) $\frac{3x+1}{x^2}$ y $\frac{3}{x}$

b) $\frac{5}{x-1}$ y $\frac{x}{(x+1)(x-1)}$

c) $\frac{3}{x+1}$ y $\frac{2}{x^2-1}$

a) $\frac{3x+1}{x^2}$; $\frac{3x}{x^2}$

b) $\frac{5(x+1)}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{x}{(x-1)(x+1)}$

c) $\frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3(x-1)}{x^2-1}$; $\frac{2}{x^2-1}$

2. Opera.

a) $\frac{3x+1}{x^2} - \frac{3}{x}$

b) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x^2-1}$

c) $\frac{2x}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x}$

d) $\frac{x^2}{x^2-25} : \frac{x}{x-5}$

a) $\frac{1}{x^2}$

b) $\frac{3x-1}{x^2-1}$

c) $2(x-2)$

d) $\frac{x}{x+5}$

3. Efectúa las operaciones y simplifica el resultado.

a) $\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x^2+5}{x^2+3x}$

b) $\frac{3}{x} \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1} \right)$

c) $\frac{5x-10}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x-2}$

d) $\frac{3x-1}{x} - \frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{2x+5}{x-2}$

e) $\frac{2x+1}{2x-1} : \frac{x^2}{4x-2}$

f) $\frac{x^2}{x-1} : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right)$

a) $\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x^2+5}{x^2+3x} = \frac{(2x+1) \cdot x - (x^2+5)}{x^2+3x} = \frac{2x^2+x-x^2-5}{x^2+3x} = \frac{x^2+x-5}{x^2+3x}$

b) $\frac{3}{x} \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1} \right) = \frac{3}{x} \left(\frac{x(x-1)-x^2}{x^2-1} \right) = \frac{3(x-1-x)}{x^2-1} = \frac{-3}{x^2-1}$

c) $\frac{5x-10}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x-2} = \frac{5(x-2)(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-2)} = 5(x-3)$

d) $\frac{3x-1}{x} - \frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{2x+5}{x-2} = \frac{(3x-1)(x-2) - (x+3) + x(2x+5)}{x(x-2)} =$
 $= \frac{3x^2-7x+2-x-3+2x^2+5x}{x(x-2)} = \frac{5x^2-3x-1}{x(x-2)}$

e) $\frac{2x+1}{2x-1} : \frac{x^2}{4x-2} = \frac{(2x+1) \cdot 2 \cdot (2x-1)}{x^2(2x-1)} = \frac{2(2x+1)}{x^2}$

f) $\frac{x^2}{x-1} : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{x^2}{x-1} : \left(\frac{x-1-x}{x(x-1)} \right) = \frac{x^3(x-1)}{-(x-1)} = -x^3$

Página 48

Hazlo tú. Opera y simplifica.

$$\left(\frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2} \right) : \frac{1}{x-2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2} \right) : \frac{1}{x-2} &= \left(\frac{3x}{(x-2)^2} - \frac{3x-6}{(x-2)^2} \right) : \frac{1}{x-2} = \frac{6}{(x-2)^2} : \frac{1}{x-2} = \\ &= \frac{6(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{6}{x-2} \end{aligned}$$

Hazlo tú. Calcula el valor de k para que esta división sea exacta:

$$(2x^4 - 5x^3 + kx^2 - 12) : (x + 2)$$

Para que $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + kx^2 - 12$ sea divisible entre $(x + 2)$, ha de verificarse que $P(-2) = 0$:

$$P(-2) = 2(-2)^4 - 5(-2)^3 + k(-2)^2 - 12 = 0 \rightarrow 60 + 4k = 0 \rightarrow k = -15$$

Hazlo tú. Factoriza.

a) $x^2m + x^2n - ym - yn$

b) $x^3 + a^3$

a) $x^2m + x^2n - ym - yn = x^2(m + n) - y(m + n) = (x^2 - y)(m + n)$

b) $x^3 + a^3$ puede tener como raíces: $a; -a; a^2; -a^2; a^3; -a^3$

$$\begin{array}{r|rrrr} -a & 1 & 0 & 0 & a^3 \\ & & -a & a^2 & -a^3 \\ \hline & 1 & -a & a^2 & 0 \end{array} \rightarrow x^2 - ax + a^2, \text{ como en el ejemplo resuelto, vemos que no tiene solución si } a \neq 0.$$

$x = -a$ es raíz


$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

Ejercicios y problemas

Página 49

Practica

Polinomios. Operaciones

1.  Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 5x^2 - 3$; $Q(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$ y $R(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2$, calcula:

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 - 3 \\ - \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1 \\ -x^3 + \frac{1}{2}x^2 \\ \hline -\frac{29}{6}x^2 + 2x - 4 \end{array}$$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 - 3 \\ - \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1 \\ \hline -x^3 + 5x^2 + 3 \\ 2x^4 - 10x^3 - 6x \\ -\frac{1}{3}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + x^2 \\ \hline -\frac{1}{3}x^5 + \frac{11}{3}x^4 - 11x^3 + 6x^2 - 6x + 3 \end{array}$$

b) $2P(x) - 3Q(x)$

d) $Q(x) \cdot R(x)$

b) $2P(x) - 3Q(x)$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 10x^2 - 6 \\ x^2 - 6x + 3 \\ \hline 2x^3 - 9x^2 - 6x - 3 \end{array}$$

d) $Q(x) \cdot R(x)$

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1 \\ x^3 - \frac{1}{2}x^2 \\ \hline \frac{1}{6}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 \\ -\frac{1}{3}x^5 + 2x^4 - x^3 \\ \hline -\frac{1}{3}x^5 + \frac{13}{6}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

2.  Efectúa y simplifica el resultado.

a) $(2y + x)(2y - x) + (x + y)^2 - x(y + 3)$

b) $3x(x + y) - (x - y)^2 + (3x + y)y$

c) $(2y + x + 1)(x - 2y) - (x + 2y)(x - 2y)$

d) $(x + y)(2x - y)(x + 2y)$

a) $4y^2 - x^2 + x^2 + 2xy + y^2 - xy - 3x = 5y^2 + xy - 3x$

b) $3x^2 + 3xy - x^2 + 2xy - y^2 + 3xy + y^2 = 2x^2 + 8xy$

c) $2yx - 4y^2 + x^2 + 2xy + x - 2y - x^2 + 4y^2 = x - 2y$

d) $(2x^2 - xy + 2xy - y^2)(x + 2y) = (2x^2 + xy - y^2)(x + 2y) =$

$$= 2x^3 + 4x^2y + x^2y + 2xy^2 - xy^2 - 2y^3 = 2x^3 + 5x^2y + xy^2 - 2y^3$$

3. Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica:

a) $\frac{3x(x+5)}{5} - \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(x-4)(x+4)}{2}$

b) $\frac{(8x^2-1)(x^2+2)}{10} - \frac{(3x^2+2)^2}{15} + \frac{(2x+3)(2x-3)}{6}$

c) $\frac{(x-1)^3}{8} + \frac{3}{4}x(x+2)^2 - \frac{x^3}{10}$

a) $20 \left[\frac{3x(x+5)}{5} - \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(x-4)(x+4)}{2} \right] = 12x^2 + 60x - 5(4x^2 + 4x + 1) + 10(x^2 - 16) =$

$= 12x^2 + 60x - 20x^2 - 20x - 5 + 10x^2 - 160 = 2x^2 + 40x - 165$

b) $3(8x^4 + 15x^2 - 2) - 2(9x^4 + 12x^2 + 4) + 5(4x^2 - 9) =$

$= 24x^4 + 45x^2 - 6 - 18x^4 - 24x^2 - 8 + 20x^2 - 45 = 6x^4 + 41x^2 - 59$

c) $40 \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{8} + \frac{3x^3 + 12x^2 + 12x}{4} - \frac{x^3}{10} \right) =$

$= 5x^3 - 15x^2 + 15x - 5 + 30x^3 + 120x^2 + 120x - 4x^3 = 31x^3 + 105x^2 + 135x - 5$

4. Expresa como producto de dos binomios.

a) $49x^2 - 16$

b) $9x^4 - y^2$

c) $81x^4 - 64x^2$

d) $25x^2 - 3$

e) $2x^2 - 100$

f) $5x^2 - 2$

a) $(7x + 4)(7x - 4)$

b) $(3x^2 + y)(3x^2 - y)$

c) $(9x^2 + 8x)(9x^2 - 8x)$

d) $(5x + \sqrt{3})(5x - \sqrt{3})$

e) $(\sqrt{2}x + 10)(\sqrt{2}x - 10)$

f) $(\sqrt{5}x + \sqrt{2})(\sqrt{5}x - \sqrt{2})$

5. Completa cada expresión para que sea el cuadrado de un binomio:

a) $16x^2 + (\dots) - 8xy$

b) $(\dots) + 25y^2 + 60xy$

c) $\frac{9}{16}x^2 + 4y^2 + (\dots)$

d) $(\dots) + \frac{y^2}{9} - \frac{4}{3}x^2y$

a) $16x^2 + y^2 - 8xy = (4x - y)^2$

b) $36x^2 + 25y^2 + 60xy = (5y + 6x)^2$

c) $\frac{9}{16}x^2 + 4y^2 + 3xy = \left(\frac{3}{4}x + 2y\right)^2$

d) $4x^4 + \frac{y^2}{9} - \frac{4}{3}x^2y = \left(2x^2 - \frac{y}{3}\right)^2$

6. Sacar factor común e identificar los productos notables como en el ejemplo.

• $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2$

a) $20x^3 - 60x^2 + 45x$

b) $27x^3 - 3xy^2$

c) $3x^3 + 6x^2y + 3y^2x$

d) $4x^4 - 81x^2y^2$

a) $5x(4x^2 - 12x + 9) = 5x(2x - 3)^2$

b) $3x(9x^2 - y^2) = 3x(3x + y)(3x - y)$

c) $3x(x^2 + 2xy + y^2) = 3x(x + y)^2$

d) $x^2(4x^2 - 81y^2) = x^2(2x + 9y)(2x - 9y)$

7. ▢ Halla el cociente y el resto de cada una de estas divisiones:

a) $(7x^2 - 5x + 3) : (x^2 - 2x + 1)$

b) $(2x^3 - 7x^2 + 5x - 3) : (x^2 - 2x)$

c) $(x^3 - 5x^2 + 2x + 4) : (x^2 - x + 1)$

$$\begin{array}{r} 7x^2 - 5x + 3 \quad | \quad x^2 - 2x + 1 \\ -7x^2 + 14x - 7 \quad 7 \\ \hline 9x - 4 \end{array}$$

COCIENTE: 7

RESTO: $9x - 4$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 7x^2 + 5x - 3 \quad | \quad x^2 - 2x \\ -2x^3 + 4x^2 \quad 2x - 3 \\ \hline -3x^2 \\ 3x^2 - 6x \\ \hline -x - 3 \end{array}$$

COCIENTE: $2x - 3$

RESTO: $-x - 3$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 2x + 4 \quad | \quad x^2 - x + 1 \\ -x^3 + x^2 - x \quad x - 4 \\ \hline -4x^2 + x \\ 4x^2 - 4x + 4 \\ \hline -3x + 8 \end{array}$$

COCIENTE: $x - 4$

RESTO: $-3x + 8$

8. ▢ Divide y expresa en cada caso así:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

a) $(3x^5 - 2x^3 + 4x - 1) : (x^3 - 2x + 1)$

b) $(x^4 - 5x^3 + 3x - 2) : (x^2 + 1)$

c) $(4x^5 + 3x^3 - 2x) : (x^2 - x + 1)$

d) $(x^3 - 5x^2 + 3x + 1) : (x^2 - 5x + 1)$

$$\begin{array}{r} 3x^5 - 2x^3 + 4x - 1 \quad + \quad 4x - 1 \quad | \quad x^3 - 2x + 1 \\ -3x^5 + 6x^3 - 3x^2 \quad 3x^2 + 4 \\ \hline 4x^3 - 3x^2 \\ -4x^3 + 8x - 4 \\ \hline -3x^2 + 12x - 5 \end{array}$$

$$\frac{3x^5 - 2x^3 + 4x - 1}{x^3 - 2x + 1} = 3x^2 + 4 + \frac{-3x^2 + 12x - 5}{x^3 - 2x + 1}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x^3 + 3x - 2 \quad + \quad 3x - 2 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -x^4 + x^2 \quad x^2 - 5x - 1 \\ \hline -5x^3 - x^2 \\ 5x^3 + 5x \\ \hline -x^2 + 8x \\ x^2 + 1 \\ \hline 8x - 1 \end{array}$$

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 2}{x^2 + 1} = x^2 - 5x - 1 + \frac{8x - 1}{x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r}
 c) \quad 4x^5 \quad + 3x^3 \quad - 2x \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 1 \\ \hline 4x^3 + 4x^2 + 3x - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-4x^5 + 4x^4 - 4x^3} \\
 4x^4 - x^3 \\
 \underline{-4x^4 + 4x^3 - 4x^2} \\
 3x^3 - 4x^2 \\
 \underline{-3x^3 + 3x^2 - 3x} \\
 -x^2 - 5x \\
 \underline{x^2 - x + 1} \\
 -6x + 1
 \end{array}
 \qquad
 \frac{4x^5 + 3x^3 - 2x}{x^2 - x + 1} = 4x^3 + 4x^2 + 3x - 1 + \frac{-6x + 1}{x^2 - x + 1}$$

$$\begin{array}{r}
 d) \quad x^3 - 5x^2 + 3x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 5x + 1 \\ \hline x \end{array} \right. \\
 \underline{-x^3 + 5x^2 - x} \\
 2x + 1
 \end{array}
 \qquad
 \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 1}{x^2 - 5x + 1} = x + \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 1}$$

9.  Expresa las siguientes divisiones de la forma $D = d \cdot c + r$.

a) $(6x^3 + 5x^2 - 9x) : (3x - 2)$

b) $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9) : (x^2 - 2x + 3)$

c) $(4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5) : (-2x^3 + x - 5)$

$$\begin{array}{r}
 a) \quad 6x^3 + 5x^2 - 9x \quad \left| \begin{array}{l} 3x - 2 \\ \hline 2x^2 + 3x - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-6x^3 + 4x^2} \\
 9x^2 \\
 \underline{-9x^2 + 6x} \\
 -3x \\
 \underline{3x - 2} \\
 -2
 \end{array}$$

$$6x^3 + 5x^2 - 9x = (3x - 2)(2x^2 + 3x - 1) - 2$$

$$\begin{array}{r}
 b) \quad x^4 \quad - 4x^2 + 12x - 9 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 \\ \hline x^2 + 2x - 3 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^4 + 2x^3 - 3x^2} \\
 2x^3 - 7x^2 \\
 \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x} \\
 -3x^2 + 6x \\
 \underline{3x^2 - 6x + 9} \\
 0
 \end{array}$$

$$x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$$

$$\begin{array}{r}
 c) \quad 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5 \quad \left| \begin{array}{l} -2x^3 + x - 5 \\ \hline -2x - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-4x^4 \quad + 2x^2 - 10x} \\
 2x^3 \quad - x \\
 \underline{-2x^3 \quad + x - 5} \\
 0
 \end{array}$$

$$4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 9x + 5 = (-2x^3 + x - 5)(-2x - 1)$$

10. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(2x^3 - x^2 + 3x - 1) : (2x^2 + 2x)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + 3x - 1 & 2x^2 + 2x \\ -2x^3 - 2x^2 & \\ \hline -3x^2 + 3x - 1 & x - \frac{3}{2} \\ + 3x^2 + 3x & \\ \hline & 6x - 1 \end{array}$$

b) $(x^4 - x^3 - 3x + 1) : (2x^2 - 1)$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 - 3x + 1 & 2x^2 - 1 \\ -x^4 + \frac{1}{2}x^2 & \\ \hline -x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 & \\ + x^3 & -\frac{1}{2}x \\ \hline & +\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{4} \\ \hline & -\frac{7}{2}x + \frac{5}{4} \end{array}$$

Regla de Ruffini. Aplicaciones

11. Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(5x^3 - 3x^2 + x - 2) : (x - 2)$

c) $(-x^3 + 4x) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & & 10 & 14 & 30 \\ \hline & 5 & 7 & 15 & 28 \end{array}$$

COCIENTE: $5x^2 + 7x + 15$

RESTO: 28

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & & -3 & -9 & -15 \\ \hline & -1 & -3 & -5 & -15 \end{array}$$

COCIENTE: $-x^2 - 3x - 5$

RESTO: -15

b) $(x^4 - 5x^3 + 7x + 3) : (x + 1)$

d) $(x^4 - 3x^3 + 5) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -5 & 0 & 7 & 3 \\ -1 & & -1 & 6 & -6 & -1 \\ \hline & 1 & -6 & 6 & 1 & 2 \end{array}$$

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + 6x + 1$

RESTO: 2

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & & -2 & 10 & -20 & 40 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -20 & 45 \end{array}$$

COCIENTE: $x^3 - 5x^2 + 10x - 20$

RESTO: 45

12. Utiliza la regla de Ruffini para calcular $P(3)$, $P(-5)$ y $P(7)$ en los siguientes casos:

a) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & & 6 & 3 & 30 \\ \hline & 2 & 1 & 10 & 33 \end{array} \quad P(3) = 33$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 7 & 3 \\ -5 & & -10 & 75 & -410 \\ \hline & 2 & -15 & 82 & -407 \end{array} \quad P(-5) = -407$$


$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 7 & & 14 & 63 & 490 \\ \hline & 2 & 9 & 70 & 493 \end{array} \quad P(7) = 493$$

b) $P(x) = x^4 - 3x^2 + 7$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & 61 \end{array} \quad P(3) = 61$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ -5 & & -5 & 25 & -110 & 550 \\ \hline & 1 & -5 & 22 & -110 & 557 \end{array} \quad P(-5) = 557$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\ 7 & & 7 & 49 & 322 & 2254 \\ \hline & 1 & 7 & 46 & 322 & 2261 \end{array} \quad P(7) = 2261$$

13.  Averigua cuáles de los números 1, -1, 2, -2, 3, -3 son raíces de los polinomios siguientes:

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & 8 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 2 & 0 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -4 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -3 & 15 & -30 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -24 \neq 0 \end{array}$$

Son raíces de $P(x)$: 1, -2 y 3.


$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & 1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & -4 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & -8 \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & -3 & 18 & -57 \\ \hline & 1 & -6 & 19 & -60 \neq 0 \end{array}$$

3 es una raíz de $Q(x)$ (no probamos con 2 y -2 porque no son divisores de -3).

14.  Utiliza la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(4x^2 - 8x + 3) : (4x - 2)$

b) $(2x^3 - 4x^2 + 3x - 2) : (2x - 3)$

c) $(3x^3 - 2x - 1) : (3x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrr} \frac{1}{2} & 4 & -8 & 3 \\ & & 2 & -3 \\ \hline & 4 & -6 & 0 \end{array}$$

$$4x - 2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Cociente} = \frac{1}{4} \cdot (4x - 6)$$

$$\text{Resto} = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 2 & -4 & 3 & -2 \\ & & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} \\ \hline & 2 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Cociente} = \frac{1}{2} \cdot \left(2x^2 - x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Resto} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 3 & 0 & -2 & -1 \\ & & -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} \\ \hline & 3 & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{9} \end{array}$$

$$3x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Cociente} = \frac{1}{3} \cdot \left(3x^2 - x - \frac{5}{3}\right)$$

$$\text{Resto} = -\frac{4}{9}$$

Página 50

15. Calcula el valor de m para que las siguientes divisiones tengan el resto que se indica en cada caso:

a) $(x^2 - 5x + m) : (x - 2)$ Resto = 0

b) $(x^3 - 2x^2 - x + m) : (x + 1)$ Resto = -1

c) $(2x^3 - 12x + 2m) : (x - 3)$ Resto = -5

d) $(x^2 - mx + 3) : (x + 3)$ Resto = 0

a) Utilizamos el teorema del resto.

b) $P(-1) = -1$

$$P(2) = 0$$

$$(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + m = -1$$

$$2^2 - 5 \cdot 2 + m = 0$$

$$-1 - 2 \cdot 1 + 1 + m = -1$$

$$4 - 10 + m = 0, \text{ luego } m = 6$$

$$-1 - 2 + 1 + m = -1, \text{ luego } m = 1$$

c) $P(3) = -5$

d) $P(-3) = 0$

$$2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3 + 2m = -5$$

$$(-3)^2 - m \cdot (-3) + 3 = 0$$

$$2 \cdot 27 - 36 + 2m = -5$$

$$9 + 3m + 3 = 0$$

$$54 - 36 + 2m = -5$$

$$3m = -12, \text{ luego } m = -4$$

$$2m = -5 - 18, \text{ luego } m = -\frac{23}{2}$$

16. Busca los valores de a para los cuales el polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ es divisible por $x - a$.

Las posibles raíces de $P(x)$ son: +1; -1; +2; -2; +3; -3; +6; -6. Veamos cuáles son raíces:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & 4 \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$x = -1$ sí es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$x = 2$ sí es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -2 & 12 & -26 \\ \hline & 1 & -6 & 13 & -20 \end{array}$$

$x = -2$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$x = 3$ sí es raíz.

Como el polinomio es de grado 3, puede tener como máximo tres raíces, y ya las hemos encontrado. Por tanto, $P(x)$ es divisible por $(x + 1)$, $(x - 2)$ y $(x - 3)$.

Factorización de polinomios

17. Sacar factor común y utilizar las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 12x$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x$

c) $45x^2 - 5x^4$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3$

e) $x^6 - 16x^2$

f) $16x^4 - 9$

a) $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$

c) $45x^2 - 5x^4 = 5x^2(9 - x^2) = 5x^2(3 + x)(3 - x)$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3 = x^2(x^2 + 1 + 2x) = x^2(x + 1)^2$

e) $x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = x^2(x^2 + 4)(x^2 - 4) = x^2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

f) $16x^4 - 9 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3) = (4x^2 + 3)(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

18. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x - 5$

b) $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$

d) $3x^2 + 9x - 210$

e) $2x^2 - 9x - 5$

f) $3x^2 - 2x - 5$

g) $4x^2 + 17x + 15$

h) $-x^2 + 17x - 72$

a) $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -5, x = 1$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0 \rightarrow x = -5, x = -3$

$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$

$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$

c) $7x^2 - 21x - 280 = 0 \rightarrow x = 8, x = -5$

d) $3x^2 + 9x - 210 = 0 \rightarrow x = -10, x = 7$

$7x^2 - 21x - 280 = 7(x - 8)(x + 5)$

$3x^2 + 9x - 210 = 3(x + 10)(x - 7)$

e) $2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$

f) $3x^2 - 2x - 5 = (x + 1)(3x - 5)$

g) $4x^2 + 17x + 15 = (x + 3)(4x + 5)$

h) $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 8)(x - 9)$

19. Completa la descomposición en factores de los polinomios siguientes:

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9)$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40)$

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9) = (x + 5)(x - 5)(x - 3)^2$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40) = x(x - 7)(x - 8)(x - 5)$

20. Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $3x^3 - 15x^2 + 12x$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

d) $x^4 - 13x^2 + 36$

a)		1	2	-1	-2
	1		1	3	2
		1	3	2	0
	-1		-1	-2	
		1	2	0	

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

Sus raíces son 1, -1 y -2.

b)		3	-15	12
	1		3	-12
		3	-12	0
	4		12	
		3	0	

$3x^3 - 15x^2 + 12x = 3x(x - 1)(x - 4)$

Sus raíces son 0, 1 y 4.

c)		1	-9	15	-7
	1		1	-8	7
		1	-8	7	0
	1		1	-7	
		1	-7	0	

$x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = (x - 1)^2(x - 7)$

Sus raíces son 1 y 7.

d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow x = 2; x = -2; x = 3; x = -3$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$

Sus raíces son 2, 3 y -3.

21. Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

b) $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

c) $x^3 - x - 6$

d) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

e) $6x^3 + 13x^2 - 4$

f) $4x^3 + 12x^2 - 25x - 75$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x^2 + x + 1)$$

Raíz: 3

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -19 & 60 \\ -3 & & -6 & 39 & -60 \\ \hline & 2 & -13 & 20 & 0 \\ 4 & & 8 & -20 & \\ \hline & 2 & -5 & & 0 \end{array}$$

$$2x^3 - 7x^2 - 19x + 60 = (x + 3)(x - 4)(2x - 5)$$

Raíces: -3, 4 y $\frac{5}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

Raíz: 2

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 4 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & & 4 & 8 & 5 & 1 \\ \hline & 4 & 8 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & & -4 & -4 & -1 & \\ \hline & 4 & 4 & 1 & & 0 \end{array}$$

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 =$$

$$= (x - 1)(x + 1)(4x^2 + 4x + 1) = (x - 1)(x + 1)(2x + 1)^2$$

Raíces: 1, -1 y $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 13 & 0 & -4 \\ -2 & & -12 & -2 & 4 \\ \hline & 6 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$6x^3 + 13x^2 - 4 = 6(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x + 2)(2x - 1)(3x + 2)$$

Raíces: -2, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{2}{3}$

$$6x^2 + x - 2 = 0; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & -25 & -75 \\ -3 & & -12 & 0 & 75 \\ \hline & 4 & 0 & -25 & 0 \end{array}$$

$$4x^3 + 12x^2 - 25x - 75 = (x + 3)(2x + 5)(2x - 5)$$

Raíces: -3, $-\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2}$

$$4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$$

22. Escribe un polinomio de grado 3 que tenga las raíces dadas, en cada caso:

a) 0, 1 y 2

b) -1 y 3

c) 0 y 5

a) $P(x) = x(x - 1)(x - 2) \rightarrow$ Una posible solución.

b) $P(x) = (x + 1)^2(x - 3) \rightarrow$ Una posible solución.

c) $P(x) = x^2(x - 5) \rightarrow$ Una posible solución.

23. Escribe, en cada caso, un polinomio que cumpla la condición dada:

- a) De cuarto grado sin raíces. b) Que tenga dos raíces dobles, 2 y -2.
c) De tercer grado con una sola raíz. d) De cuarto grado y con tres raíces.

- a) $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1 \rightarrow$ Una posible solución.
b) $P(x) = (x - 2)^2(x + 2)^2 \rightarrow$ Una posible solución.
c) $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1) \rightarrow$ Una posible solución.
d) $P(x) = (x - 2)^2(x - 1)(x - 3) \rightarrow$ Una posible solución.

24. Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los polinomios siguientes:

- a) $x^4 - 2x^2 + 1$ b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ c) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
d) $8x^3 + 6x^2 - 11x - 3$ e) $3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$ f) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

a) $(x - 1)^2(x + 1)^2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

Raíces: 1 y -1 (dobles)

b) $(x - 2)(x + 3)(x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 2 & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Raíces: 2, -3 y 3

c) $(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ 1 & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$$

Raíces: 1, -1, -2 y 3

d) $(x - 1)\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(4x + 1)(2x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 8 & 6 & -11 & -3 \\ 1 & & 8 & 14 & 3 \\ \hline & 8 & 14 & 3 & 0 \end{array}$$

$$8x^2 + 14x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 96}}{16} = \frac{-14 \pm 10}{16} = \begin{cases} -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4} \\ -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Raíces: 1, $-\frac{1}{4}$ y $-\frac{3}{2}$

e) $(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) = (x + 1)(3x - 1)(x + 2)$ f) $(x - 2)(x^2 + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 8 & 3 & -2 \\ -1 & & -3 & -5 & 2 \\ \hline & 3 & 5 & -2 & 0 \end{array} \quad \text{Raíces: } -1, \frac{1}{3} \text{ y } -2$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Raíces: 2

Fracciones algebraicas

25.  Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:


a) $\frac{x-4}{3x-12}$ y $\frac{1}{3}$

b) $\frac{x^2+x}{2x}$ y $\frac{x}{2}$

c) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ y $\frac{1}{x-y}$

d) $\frac{x}{x^2-x}$ y $\frac{2}{2x-2}$

- a) Sí son equivalentes, porque $3(x-4) = 3x-12$.
 b) No son equivalentes, ya que $2(x^2+x) \neq 2x^2$.
 c) Sí son equivalentes, porque $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$.
 d) Sí son equivalentes, porque $(2x-2)x = 2x^2-2x$.

26.  Descompón en factores y simplifica.

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4}$

c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2}$

e) $\frac{x-2}{x^2+x-6}$

f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2}$

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25} = \frac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{x+5}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2} = \frac{x(x+y)}{(x-y)^2}$

e) $\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$

f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2} = \frac{xy(x-3y)}{2xy^2} = \frac{x-3y}{2y}$

27.  Descompón en factores el dividendo y el divisor, y, después, simplifica.

a) $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$

b) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}$

c) $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6}$


d) $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}$

a) $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} = \frac{x(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x}{x-3}$

b) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2} = \frac{(x+1)(x-4)}{x^2(x+1)} = \frac{x-4}{x^2}$

c) $\frac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6} = \frac{x(x^2-3x+2)}{3(x^2-3x+2)} = \frac{x}{3}$

d) $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7} = \frac{(x+6)(x-7)}{(x-1)(x-7)} = \frac{x+6}{x-1}$

28.  Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{x^3 - 4x}{x^3 + x^2 - 2x}$

b) $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 1}$

c) $\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2}{2x^4 - 3x^3 + x^2}$

d) $\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^4 + x^3 - 6x^2}$

a) $\frac{x^3 - 4x}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{x(x^2 - 4)}{x(x^2 + x - 2)} = \frac{x(x+2)(x-2)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{x-2}{x-1}$

$x^2 + x - 2 = 0; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$

b) $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 1} = \frac{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2+1}$

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$ $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$

1	1	0	-5	0	4
1	1	1	-4	-4	
-1	1	1	-4	-4	0
-1	-1	0	4		
1	0	-4	0		

$x^4 - 4 = (x+2)(x-2)$

c) $\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2}{2x^4 - 3x^3 + x^2} = \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x^2(x-1)(2x-1)} = \frac{x+3}{2x-1}$

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 = x^2(x^2 + 2x - 3) = x^2(x-1)(x+3)$

$x^2 + 2x - 3 = 0; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$

$2x^4 - 3x^3 + x^2 = x^2(2x^2 - 3x + 1) = x^2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2(x-1)(2x-1)$

$2x^2 - 3x + 1 = 0; x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$

d) $\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^4 + x^3 - 6x^2} = \frac{x(2x-3)(x-1)}{x^2(2x-3)(x+2)} = \frac{x-1}{x(x+2)}$


$2x^3 - 5x^2 + 3x = x(2x^2 - 5x + 3) = x\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-1) = x(2x-3)(x-1)$

$2x^2 - 5x + 3 = 0; x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$

$2x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(2x^2 + x - 6) = x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2) = x^2(2x-3)(x+2)$

$2x^2 + x - 6 = 0; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ -\frac{8}{4} = -2 \end{cases}$

Página 51

29.  Reduce a común denominador y opera.

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x}$

b) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1$

d) $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x}$

e) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x}$

f) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3}$

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{4x} - \frac{1}{4x} + \frac{4}{4x} = \frac{2-1+4}{4x} = \frac{5}{4x}$

mín.c.m. $(2x, 4x, x) = 4x$

b) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{3x^2} - \frac{x}{3x^2} + \frac{3x}{3x^2} = \frac{3-x+3x}{3x^2} = \frac{3+2x}{3x^2}$

mín.c.m. $(x^2, 3x, x) = 3x^2$

c) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1 = \frac{x^2}{2x} + \frac{6}{2x} - \frac{2x}{2x} = \frac{x^2-2x+6}{2x}$

mín.c.m. $(2, x, 1) = 2x$

d) $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x} = \frac{6}{3x^2} - \frac{x(x+1)}{3x^2} = \frac{6}{3x^2} - \frac{x^2+x}{3x^2} = \frac{6-x^2-x}{3x^2} = \frac{-x^2-x+6}{3x^2}$

mín.c.m. $(x^2, 3x) = 3x^2$

e) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{x^2}{x(x-3)} - \frac{3x-9}{x(x-3)} = \frac{x^2-3x+9}{x(x-3)}$

mín.c.m. $(x-3, x) = x(x-3)$

f) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3} = \frac{x^2-9}{(x+1)(x+3)} - \frac{x^2+x}{(x+1)(x+3)} = \frac{x^2-9-x^2-x}{(x+1)(x+3)} = \frac{-x-9}{(x+1)(x+3)}$

mín.c.m. $[(x+1), (x+3)] = (x+1)(x+3)$

30.  Reduce a común denominador y opera.

a) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{2}{x-3} + \frac{x}{x^2-9}$

b) $\frac{2}{x-2} - \frac{x+1}{x^2-2x} - \frac{3}{x^2-4}$

c) $\frac{1}{2x+2} + \frac{3x-3}{x^2-x-2} - \frac{x}{x-2}$

a) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{2}{x-3} + \frac{x}{x^2-9} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} =$

$= \frac{x^2-4x+3-2x-6+x}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^2-5x-3}{(x+3)(x-3)}$

$\left. \begin{array}{l} (x+3) \\ (x-3) \\ x^2-9=(x+3)(x-3) \end{array} \right\} \rightarrow \text{mín.c.m.} = (x+3)(x-3)$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2}{x-2} - \frac{x+1}{x^2-2x} - \frac{3}{x^2-4} &= \frac{2x(x+2)}{x(x+2)(x-2)} - \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+2)(x-2)} - \frac{3x}{x(x+2)(x-2)} = \\ &= \frac{2x^2+4x-x^2-3x-2-3x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x-2}{x(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x-2) \\ x^2-2x = x(x-2) \\ x^2-4 = (x+2)(x-2) \end{array} \right\} \rightarrow \text{mín.c.m.} = x(x+2)(x-2)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{2x+2} + \frac{3x-3}{x^2-x-2} - \frac{x}{x-2} &= \frac{(x-2)}{2(x+1)(x-2)} + \frac{2(3x-3)}{2(x+1)(x-2)} - \frac{2x(x+1)}{2(x+1)(x-2)} = \\ &= \frac{x-2+6x-6-2x^2-2x}{2(x+1)(x-2)} = \frac{-2x^2+5x-8}{2(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x+2 = 2(x+1) \\ x^2-x-2 = (x-2)(x+1) \\ (x-2) \end{array} \right\} \rightarrow \text{mín.c.m.} = 2(x+1)(x-2)$$

31.  Efectúa.

$$\text{a) } \frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1}$$

$$\text{b) } \frac{2x}{x^2+x-2} - \frac{5}{x+2} - \frac{x-4}{3x+6}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{2x+1} - \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x-2}{x^2} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} &= \\ &= \frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)} + \frac{(x+2)(x+1)x}{x^2(x-1)(x+1)} - \frac{x^2}{x^2(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{(x-2)(x^2-1) + (x+2)(x^2+x) - x^2}{x^2(x^2-1)} = \\ &= \frac{x^3-2x^2-x+2+x^3+2x^2+x^2+2x-x^2}{x^2(x^2-1)} = \frac{2x^3+x+2}{x^2(x^2-1)} = \frac{2x^3+x+2}{x^4-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2x}{x^2+x-2} - \frac{5}{x+2} - \frac{x-4}{3x+6} &= \\ &= \frac{6x}{3(x+2)(x-1)} - \frac{15(x-1)}{3(x+2)(x-1)} - \frac{(x-4)(x-1)}{3(x+2)(x-1)} = \\ &= \frac{6x-15x+15-x^2+5x-4}{3(x+2)(x-1)} = \frac{-x^2-4x+11}{3(x+2)(x-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x+2}{2x+1} - \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x} &= \\ &= \frac{2x(x+2)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} - \frac{4x}{2x(2x+1)(2x-1)} + \frac{(x+1)(2x+1)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} = \\ &= \frac{(2x^2+4x)(2x-1) - 4x + (x+1)(4x^2-1)}{2x(4x^2-1)} = \\ &= \frac{4x^3+8x^2-2x^2-4x-4x+4x^3+4x^2-x-1}{2x(4x^2-1)} = \frac{8x^3+10x^2-9x-1}{2x(4x^2-1)} \end{aligned}$$

32. Efectúa.

a) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2}{x^2-2x+1} + \frac{2x+3}{x-1} - 3$ c) $\frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+2}{x+3}$

a) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{x^2-1} + \frac{3(x-1)}{x^2-1} - \frac{x-2}{x^2-1} =$
 $= \frac{x^2+2x+1+3x-3-x+2}{x^2-1} = \frac{x^2+4x}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2}{x^2-2x+1} + \frac{2x+3}{x-1} - 3 = \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{3(x-1)^2}{(x-1)^2} =$
 $= \frac{x^2+2x^2+3x-2x-3-3(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{7x-6}{(x-1)^2}$

c) $\frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{2x-3}{x^2-9} - \frac{(x+1)(x+3)}{x^2-9} - \frac{(x+2)(x-3)}{x^2-9} =$
 $= \frac{2x-3-x^2-4x-3-x^2+x+6}{x^2-9} = \frac{-2x^2-x}{x^2-9}$

33. Opera, y simplifica si es posible.

a) $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2}$ b) $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x}$ c) $\left(1 - \frac{2}{2-x}\right) \cdot \frac{2-x}{x^2}$ d) $\frac{2x}{x+1} : \left(\frac{2x}{x+1} - 1\right)$

a) $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{(x+1)x}{2x} = \frac{x+1}{2}$

b) $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x} = \left(\frac{2x+4-2x}{x(x+2)}\right) : \frac{x-2}{x} = \frac{4x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{4}{x^2-4}$

c) $\left(1 - \frac{2}{2-x}\right) \left(\frac{2-x}{x^2}\right) = \left(\frac{2-x}{2-x} - \frac{2}{2-x}\right) \cdot \frac{2-x}{x^2} = \frac{-x}{2-x} \cdot \frac{2-x}{x^2} = \frac{-x(2-x)}{(2-x)x^2} = -\frac{1}{x}$

d) $\frac{2x}{x+1} : \left(\frac{2x}{x+1} - 1\right) = \frac{2x}{x+1} : \left(\frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1}\right) = \frac{2x}{x+1} : \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x-1}$

34. Opera y simplifica.

a) $\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x}$


c) $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1)$ d) $\frac{2}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x-1}\right)$

a) $\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9-x^2}{3x} : \frac{3+x}{3x} = \frac{9-x^2}{3x} = \frac{(3-x)(3+x)}{3+x} = 3-x$

b) $\frac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2 \cdot x} = \frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

c) $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) = \left(\frac{x^2+1}{x} : \frac{x^2-1}{x}\right) \cdot (x-1) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot (x-1) = \frac{x^2+1}{x+1}$

d) $\frac{2}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x-1}\right) = \frac{2}{x} \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{2(x-1)}{x^2}$

35.  Opera y simplifica.

a) $\left(1 - \frac{x-1}{x}\right) \frac{x^2}{x+3} - 1$ b) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) : \frac{3}{x^2}$ c) $4 - \frac{1}{2x-1} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

d) $\left(1 + \frac{y}{x}\right) : \left(1 + \frac{x}{y}\right)$ e) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{3x-4}{2x}\right) \cdot \frac{6x}{6-2x}$

a) $\left(1 - \frac{x-1}{x}\right) \frac{x^2}{x+3} - 1 = \left(\frac{x-x+1}{x}\right) \cdot \frac{x^2}{x+3} - 1 = \frac{x^2}{x(x+3)} - 1 =$
 $= \frac{x^2 - x(x+3)}{x(x+3)} = \frac{x^2 - x^2 - 3x}{x(x+3)} = \frac{-3x}{x(x+3)} = \frac{-3}{x+3}$


b) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) : \frac{3}{x^2} = \frac{x+3-x}{x(x+3)} : \frac{3}{x^2} = \frac{3}{x(x+3)} : \frac{3}{x^2} = \frac{x^2}{x(x+3)} = \frac{x}{x+3}$

c) $4 - \frac{1}{2x-1} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 4 - \frac{1}{2x-1} \cdot \frac{2x-1}{x^2} = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2-1}{x^2}$

d) $\left(1 + \frac{y}{x}\right) : \left(1 + \frac{x}{y}\right) = \frac{x+y}{x} : \frac{y+x}{y} = \frac{(x+y)y}{(x+y)x} = \frac{y}{x}$

e) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{3x-4}{2x}\right) \cdot \frac{6x}{6-2x} = \left(\frac{2+x-3x+4}{2x}\right) \cdot \frac{6x}{2(3-x)} =$
 $= \frac{6-2x}{2x} \cdot \frac{6x}{2(3-x)} = \frac{2(3-x)}{2x} \cdot \frac{6x}{2(3-x)} = \frac{2(3-x)6x}{2x \cdot 2(3-x)} = 3$

Aplica lo aprendido

36.  Halla, en cada caso, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los polinomios siguientes:

a) x^2 ; $x^2 - x$; $x^2 - 1$ b) $x - 3$; $x^2 - 9$; $x^2 - 6x + 9$


c) $x + 2$; $3x + 6$; $x^2 + x - 2$ d) $2x$; $2x + 1$; $4x^2 - 1$

a) $\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^2 - x = x(x-1) \\ x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = 1 \\ \text{mín.c.m. } [x^2, x^2 - x, x^2 - 1] = x^2(x-1)(x+1) \end{array}$

b) $\left. \begin{array}{l} x - 3 \\ x^2 - 9 = (x+3)(x-3) \\ x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x - 3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = x - 3 \\ \text{mín.c.m. } [x - 3, x^2 - 9, x^2 - 6x + 9] = (x - 3)^2(x + 3) \end{array}$

c) $\left. \begin{array}{l} x + 2 \\ 3x + 6 = 3(x + 2) \\ x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [x + 2, 3x + 6, x^2 + x - 2] = x + 2 \\ \text{mín.c.m. } [x + 2, 3x + 6, x^2 + x - 2] = 3(x + 2)(x - 1) \end{array}$

d) $\left. \begin{array}{l} 2x \\ 2x + 1 \\ 4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d. } [2x, 2x + 1, 4x^2 - 1] = 1 \\ \text{mín.c.m. } [2x, 2x + 1, 4x^2 - 1] = 2x(4x^2 - 1) \end{array}$

37.  Sustituye, en cada caso, los puntos suspensivos por la expresión adecuada para que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{\dots}{x + 1}$

b) $\frac{x}{2x + 1} = \frac{x^2}{\dots}$

c) $\frac{x}{x - 3} = \frac{\dots}{x^2 - 9}$

d) $\frac{2}{x + 2} = \frac{\dots}{x^2 + 4x + 4}$

a) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x + 1}$

b) $\frac{x}{2x + 1} = \frac{x^2}{x(2x + 1)}$

c) $\frac{x}{x - 3} = \frac{x(x + 3)}{x^2 - 9}$


d) $\frac{2}{x + 2} = \frac{2(x + 2)}{x^2 + 4x + 4}$

38.  Halla el valor de m para que el polinomio $mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$ sea divisible por $x + 2$.

Llamamos $P(x) = mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m$. Dicho polinomio ha de ser divisible por $x + 2$, luego el resto ha de ser 0:

$$P(-2) = 0 \rightarrow m(-2)^3 - 3(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 9m = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -8m - 12 - 10 + 9m = 0 \rightarrow m = 22$$

39.  Calcula el valor de a y b para que el polinomio $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + ax + b$ sea divisible por $x - 1$ y por $x + 2$.

Como $P(x)$ es divisible por $x - 1$, $P(1) = 0 \rightarrow 2 + 7 + a + b = 0 \rightarrow a + b = -9$

Como $P(x)$ es divisible por $x + 2$, $P(-2) = 0 \rightarrow 2 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) + b = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow -16 + 28 - 2a + b = 0 \rightarrow -2a + b = -12$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a + b = -9 & a + \cancel{b} = -9 \\ -2a + b = -12 & \rightarrow 2a - \cancel{b} = 12 \end{cases}$$

$$\frac{3a}{3a} = 3 \rightarrow a = 1$$

$$1 + b = -9 \rightarrow b = -10$$

40.  Halla el valor de m y n para que el polinomio

$$P(x) = x^3 - mx^2 + nx + 4$$

sea divisible por $x - 2$ y $x + 2$.

¿Cuáles son las raíces de $P(x)$?

Para que $P(x)$ sea divisible por $x - 2$, ha de ser $P(2) = 0$.

Para que $P(x)$ sea divisible por $x + 2$, ha de ser $P(-2) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} P(2) &= 2^3 - m \cdot 2^2 + n \cdot 2 + 4 && \rightarrow 12 - 4m + 2n = 0 \\ P(-2) &= (-2)^3 - m(-2)^2 + n(-2) + 4 && \rightarrow -4 - 4m - 2n = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{8 - 8m}{8 - 8m} = 0 \rightarrow m = 1$$

$$12 - 4 + 2n = 0 \rightarrow 8 + 2n = 0 \rightarrow n = -4$$

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x + 2)(x - 1)$$

Las raíces de $P(x)$ son $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 1$.

41.  El resto de la siguiente división es igual a -8 :


$$(2x^4 + kx^3 - 7x + 6) : (x - 2)$$

¿Cuánto vale k ?

Llamamos $P(x) = 2x^4 + kx^3 - 7x + 6$.

El resto de la división $P(x) : (x - 2)$ es $P(2)$, luego:

$$\begin{aligned} P(2) = -8 &\rightarrow 2 \cdot 2^4 + k \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = -8 \rightarrow \\ &\rightarrow 32 + 8k - 14 + 6 = -8 \rightarrow 8k = -32 \rightarrow k = -4 \end{aligned}$$

42.  Halla el valor que deben tener a y b para que al dividir el polinomio $P(x) = 3x^3 + ax^2 - 5x + b$ entre $(x - 1)$ el resto sea 14 , y al dividir el mismo polinomio entre $(x + 3)$ el resto sea -2 .

$$P(1) = 14 = 3 + a - 5 + b, \text{ luego } a + b = 16$$

$$\begin{aligned} P(-3) = -2 &= 3 \cdot (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + b \\ -2 &= -81 + 9a + 15 + b, \text{ luego } 9a + b = 64 \end{aligned}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ 9a + b = 64 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} -a - \cancel{b} = -16 \\ 9a + \cancel{b} = 64 \\ \hline 8a = 48 \rightarrow a = 6 \end{array}$$

$$6 + b = 16 \rightarrow b = 10$$

Página 52

43. Si $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 81x + 245$, halla los valores $P(8,75)$, $P(10,25)$ y $P(-7)$ con ayuda de la calculadora.

Describe la secuencia de teclas utilizadas como en la página 39.

$$8,75 \text{ (Min) } 3 \text{ (x) (MR) (-) } 11 \text{ (=) (x) (MR) (-) } 81 \text{ (=) (x) (MR) (+) } 245 \text{ (=) } \boxed{703.82} \rightarrow P(8,75) = 703,82\dots$$

$$10,25 \text{ (Min) } 3 \text{ (x) (MR) (-) } 11 \text{ (=) (x) (MR) (-) } 81 \text{ (=) (x) (MR) (+) } 245 \text{ (=) } \boxed{1489.7347\dots} \rightarrow P(10,25) = 1489,73\dots$$

$$7 \text{ (+/-) (Min) } 3 \text{ (x) (MR) (-) } 11 \text{ (=) (x) (MR) (-) } 81 \text{ (=) (x) (MR) (+) } 245 \text{ (=) } \boxed{-756} \rightarrow P(-7) = -756$$

44. Comprueba si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:

a) $P(x) = x^4 - 4x^2$ y $Q(x) = x^2 - 2x$

b) $P(x) = x^2 - 10x + 25$ y $Q(x) = x^2 - 5x$

c) $P(x) = x^3 + x^2 - 12x$ y $Q(x) = x - 3$

a) $\left. \begin{array}{l} P(x) = x^2(x - 2)(x + 2) \\ Q(x) = x(x - 2) \end{array} \right\} Q(x) \text{ es divisor de } P(x).$

b) $\left. \begin{array}{l} P(x) = (x - 5)^2 \\ Q(x) = x(x - 5) \end{array} \right\} \text{ No hay relación de divisibilidad.}$

c) $\left. \begin{array}{l} P(x) = x(x - 3)(x + 4) \\ Q(x) = x - 3 \end{array} \right\} Q(x) \text{ es divisor de } P(x).$

45. Sacar factor común en cada expresión:

a) $(x + 2)(x - 3) + 2x(x + 2)$

b) $(x - 2)(2x + 3) - (5 - x)(x - 2)$

c) $(x + 5)(2x - 1) + (x - 5)(2x - 1)$

d) $(3 - y)(a + b) - (a - b)(3 - y)$

a) $(x + 2)[(x - 3) + 2x] = (x + 2)(3x - 3) = 3(x + 2)(x - 1)$

b) $(x - 2)[(2x + 3) - (5 - x)] = (x - 2)(3x - 2)$

c) $(2x - 1)[(x + 5) + (x - 5)] = (2x - 1)(2x)$

d) $(3 - y)[(a + b) - (a - b)] = (3 - y)(2b)$

46. Factoriza las siguientes expresiones:

a) $ax - ay + bx - by$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$

a) $ax - ay + bx - by$

$a(x - y) + b(x - y)$

$(a + b)(x - y)$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$

$3xy(x + y) + y(x + y)$

$(3xy + y)(x + y)$

b) $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

d) $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

b) $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

$2x^2(y + 1) + (y + 1)$

$(2x^2 + 1)(y + 1)$

d) $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

$2b^2(ab + 1) - (ab + 1)$

$(2b^2 - 1)(ab + 1)$

47. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$

b) $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

c) $\frac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{-4x^2 + 8bx + 2ba - ax}$

a) $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \frac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \frac{xy}{5}$

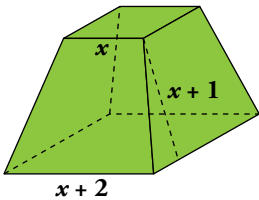
b) $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \frac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \frac{b}{a}$

c) $\frac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{-4x^2 + 8bx + 2ba - ax} = \frac{2a^2b(2b - x)}{2b(a + 4x) - x(a + 4x)} = \frac{2a^2b(2b - x)}{(2b - x)(a + 4x)} = \frac{2a^2b}{a + 4x}$

Resuelve problemas

48. Expresa, en función de x , el área total de este tronco de pirámide:

$x + 1$ es la altura de una cara lateral.



$$\text{Área lateral} = 4 \left[\frac{(x + 2 + x)}{2} \cdot (x + 1) \right] = 4(x + 1)^2$$

$$\text{Área de las bases} = x^2 + (x + 2)^2$$

$$\text{Área total} = 4(x + 1)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = 6x^2 + 12x + 8$$

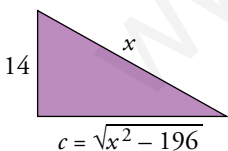
49. Un grifo tarda x minutos en llenar un depósito. Otro grifo tarda 3 minutos menos en llenar el mismo depósito. Expresa en función de x la parte del depósito que se llena abriendo los dos durante un minuto.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 3}$$

50. Se mezclan x kg de pintura de 5 €/kg con y kg de otra de 3 €/kg. ¿Cuál será el precio de 1 kg de la mezcla? Exprésalo en función de x e y .

$$\frac{5x + 3y}{x + y}$$

51. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 14 cm. Escribe el perímetro y el área del triángulo en función de la hipotenusa x .



$$\text{Perímetro: } P = 14 + x + \sqrt{x^2 - 196}$$

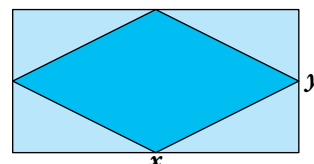
$$\text{Área: } A = \frac{14\sqrt{x^2 - 196}}{2} = 7\sqrt{x^2 - 196}$$


$$\text{Pitágoras: } x^2 = 14^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{x^2 - 196}$$

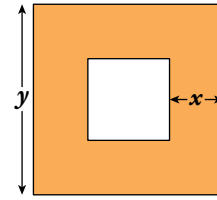
52. En un rectángulo de lados x e y inscribimos un rombo. Escribe el perímetro del rombo en función de los lados del rectángulo.

$$\text{El lado del rombo es } l = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Perímetro} = 4\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$




53.  Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada utilizando x e y .




$$\text{Área cuadrado grande} = y^2$$

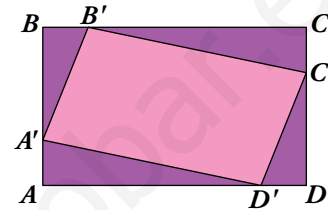
$$\text{Área cuadrado pequeño} = (y - 2x)^2$$

$$\text{Área parte coloreada} = y^2 - (y - 2x)^2 = 4xy - 4x^2$$

54.  Dos pueblos, A y B, distan 60 km. De A sale un coche hacia B con velocidad v . Al mismo tiempo sale otro de B en dirección a A con velocidad $v + 3$. Expresa en función de v el tiempo que tardan en encontrarse.

$$t = \frac{60}{2v + 3}$$

55.  En el rectángulo $ABCD$ de lados $\overline{AB} = 3$ cm y $\overline{BC} = 5$ cm, hemos inscrito el cuadrilátero $A'B'C'D'$ haciendo $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = x$. Escribe el área de $A'B'C'D'$ en función de x .



Sabiendo que $\overline{AD'} = \overline{B'C} = 5 - x$ y $\overline{A'B} = \overline{C'D} = 3 - x$, se tendrá:

$$\text{El área del triángulo } B'CC' \text{ es } \frac{x(5-x)}{2}.$$

$$\text{El área del triángulo } A'AD' \text{ es } \frac{x(5-x)}{2}.$$

$$\text{El área del triángulo } B'BA' \text{ es } \frac{x(3-x)}{2}.$$

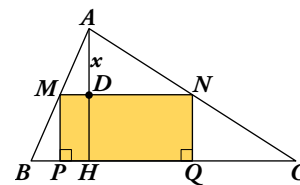
$$\text{El área del triángulo } D'DC' \text{ es } \frac{x(3-x)}{2}.$$

$$\text{El área del rectángulo } ABCD \text{ es } 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} A_{\text{PARALELOGRAMO}} &= 15 - \left[2 \cdot \frac{x(5-x)}{2} + 2 \cdot \frac{x(3-x)}{2} \right] = 15 - [x(5-x) + x(3-x)] = \\ &= 15 - (-2x^2 + 8x) = 2x^2 - 8x + 15 \end{aligned}$$

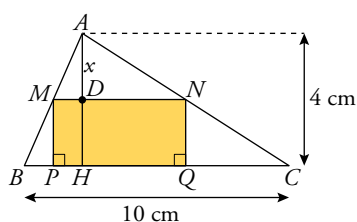
56.  En el triángulo de la figura conocemos $\overline{BC} = 10$ cm y $\overline{AH} = 4$ cm.

Por un punto D de la altura, tal que $\overline{AD} = x$, se traza una paralela MN a BC . Desde M y N se trazan perpendiculares a BC .



- a) Expresa \overline{MN} en función de x . (Utiliza la semejanza de los triángulos AMN y ABC).

- b) Escribe el área del rectángulo $MNPQ$ mediante un polinomio en x .




- a) Por la semejanza de triángulos:

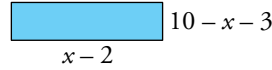
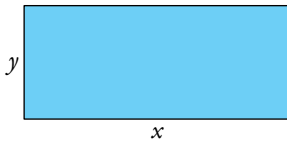
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{MN}}{x} \rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{BC} \cdot x}{\overline{AH}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{MN} = \frac{10 \cdot x}{4} \rightarrow \overline{MN} = \frac{5}{2}x$$

b) $\overline{MP} = 4 - x \rightarrow A_{\text{RECTÁNGULO}} = \overline{MN} \cdot \overline{MP} = \frac{5}{2}x(4 - x) = 10x - \frac{5}{2}x^2$

Página 53

57.  Tenemos un rectángulo de 20 cm de perímetro. Si la base disminuye en 2 cm y la altura en 3 cm, ¿cuánto disminuye el área del rectángulo? Exprésalo en función de la base.




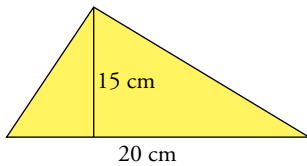
$$x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$$

$$\text{Área}_2 = (x - 2)(7 - x)$$

$$\text{Área}_1 = x(10 - x)$$

$$\text{Diferencia de las áreas: } x(10 - x) - (x - 2)(7 - x) = 10x - x^2 - 7x + x^2 + 14 - 2x = x + 14$$


58.  La base de un triángulo mide 20 cm, y la altura, 15 cm. Si la altura aumenta un $x\%$ y la base un $(x + 2)\%$, expresa el área del nuevo triángulo en función de x .



$$20 \text{ cm} \rightarrow 20 + \frac{x+2}{100} \cdot 20 = 20 + \frac{x+2}{5} = \frac{x+102}{5}$$

$$15 \text{ cm} \rightarrow 15 + \frac{x}{100} \cdot 15 = 15 + \frac{3x}{20} = \frac{300+3x}{20}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+102}{5} \cdot \frac{300+3x}{20} \right)$$


59.  Un comerciante vendió dos bicicletas. En una ganó un 20% y en la otra perdió el 10% sobre el precio de compra en ambos casos. En total obtuvo una ganancia de un 15% sobre lo que le costaron. Expresa algebraicamente este enunciado.

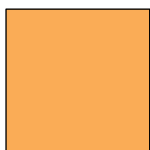
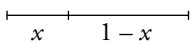
La primera bicicleta le cuesta x , la vende por $1,2x$ $\left(+20\% = 1 + \frac{20}{100} = 1,2 \right)$.

La segunda bicicleta le cuesta y , la vende por $0,9y$ $\left(-10\% = 1 - \frac{10}{100} = 0,9 \right)$.

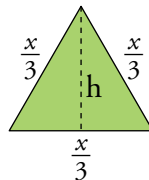
Las dos bicicletas juntas le cuestan $(x + y)$ y las vende por $1,15 \cdot (x + y)$.

Por tanto: $1,2x + 0,9y = 1,15(x + y) \rightarrow 0,05x = 0,25y \rightarrow x = 5y$

60.  Dividimos un alambre de 1 m de longitud en dos partes desiguales. Con una de ellas formamos un triángulo equilátero, y con la otra, un cuadrado. Escribe la suma de las áreas de ambas figuras.



$$A_C = \left(\frac{1-x}{4} \right)^2$$

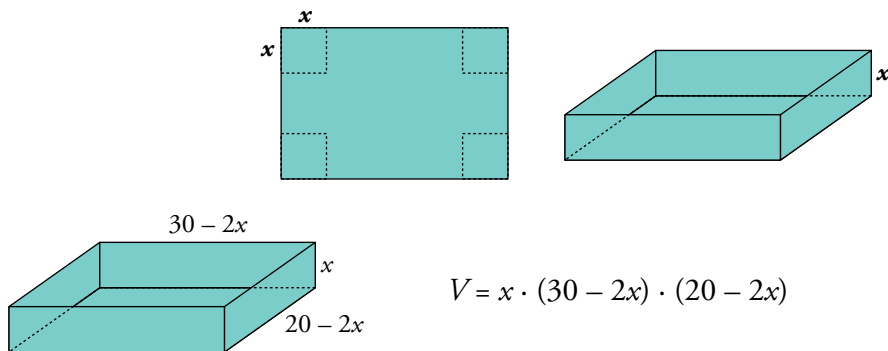


$$h = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{12}} = \frac{x}{\sqrt{12}}$$

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{12}} = \frac{x^2}{6\sqrt{12}}$$

$$\text{Suma de las áreas} = \left(\frac{1-x}{4} \right)^2 + \frac{x^2}{6\sqrt{12}}$$

61. De una cartulina rectangular cuyas dimensiones son 30 cm y 20 cm, recortamos un cuadrado de lado x en cada esquina para construir una caja sin tapa. Escribe el volumen de la caja en función de x .



$$V = x \cdot (30 - 2x) \cdot (20 - 2x)$$

Reflexiona sobre la teoría

62. En una división:

$$\text{Dividendo} = P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 2$$

$$\text{Cociente} = C(x) = x^2 - 5x - 1$$

$$\text{Resto} = R(x) = 8x - 1$$

¿Cuál es el divisor?

Como debe verificarse que $P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$, donde $D(x)$ es el divisor:

$$P(x) - R(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 2 - 8x + 1 = x^4 - 5x^3 - 5x - 1$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x^3 \quad - 5x - 1 \quad \Big| \quad x^2 - 5x - 1 \\ -x^4 + 5x^3 + x^2 \\ \hline x^2 - 5x - 1 \\ -x^2 + 5x + 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \rightarrow \text{Luego: } D(x) = x^2 + 1$$

63. ¿Cuál debe ser el valor de a y de b para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sean iguales?

$$P(x) = x^3 - (4 + a)x + (1 + b)$$

$$Q(x) = (a + 3)x^3 + (a + 2)x^2 - 2x + 5$$

Igualamos coeficiente a coeficiente:

$$\left. \begin{array}{l} a + 3 = 1 \\ a + 2 = 0 \\ 4 + a = 2 \end{array} \right\} \rightarrow a = -2 \qquad 1 + b = 5 \rightarrow b = 4$$


64. Las raíces de $P(x)$ son 0, 2 y -3.

a) Escribe tres divisores de $P(x)$ de primer grado.


b) Escribe un divisor de $P(x)$ de segundo grado.

a) x ; $x - 2$; $x + 3$

b) Por ejemplo: $x(x - 2)$

- 65.**  a) Si la división $P(x) : (x - 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor $P(2)$?
 b) Si -5 es una raíz del polinomio $P(x)$, ¿qué puedes afirmar de la división $P(x) : (x + 5)$?
 c) ¿En qué resultado te has basado para responder a las dos preguntas anteriores?


- a) Si la división es exacta, el resto es 0, luego $P(2) = 0$.
 b) La división $P(x) : (x + 5)$ es exacta, el resto es 0.
 c) En el teorema del resto.

- 66.**  Inventa dos polinomios de segundo grado que cumplan la condición indicada en cada caso:

a) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 2)$

b) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = 2x + 1$

- a) Por ejemplo: $P(x) = x^2$; $Q(x) = (x - 3)(x + 2)$
 b) Por ejemplo: $P(x) = x(2x + 1)$; $Q(x) = (2x + 1)(x - 2)$

- 67.**  Tenemos un polinomio $P(x) = (x - 1)^2(x + 3)$. Busca un polinomio de segundo grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

a) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x - 1$

b) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x - 1)^2(x^2 - 9)$


$Q(x) = (x - 1)(x - 3)$

- 68.**  ¿Por qué fracción hay que multiplicar a $\frac{x - 5}{x - 1}$ para obtener $\frac{x^2 - 5x}{x^2 + 3x - 4}$?

Habrás que multiplicar por $\frac{x}{x + 4}$ ya que:

$$\frac{x^2 - 5x}{-x^2 + 5x} \left| \frac{x - 5}{x} \right. \quad \text{y} \quad \frac{x^2 + 3x - 4}{-x^2 + x} \left| \frac{x - 1}{x + 4} \right.$$


$$\frac{0}{0} \qquad \frac{4x - 4}{-4x + 4} \qquad \frac{0}{0}$$

- 69.**  Prueba que el polinomio $x^2 + (a + b)x + ab$ es divisible por $x + a$ y por $x + b$ para cualquier valor de a y b . ¿Cuál será su descomposición factorial?

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & a + b & ab \\ -a & & -a & -ab \\ \hline & 1 & b & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & a + b & ab \\ -b & & -b & -ab \\ \hline & 1 & a & 0 \end{array}$$

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

70.  ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

- a) Si un polinomio es de grado 3, y otro, de grado 2, su producto es de grado 6.
- b) Si $P(0) = 1$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x - 1)$.
- c) Si sumamos dos polinomios de grado 3, siempre obtenemos un polinomio de grado 3.
- d) Si $P(3) \neq 0$, entonces el polinomio $P(x)$ no es divisible por $x - 3$.
- e) Si $P(-2) = 0$, entonces $x + 2$ es un factor de $P(x)$.
- f) Si $P(x) = ax^2 + bx + 2$ y $P(\pm 2) \neq 0$, entonces $P(x)$ no puede tener raíces enteras.
- g) No es posible escribir un polinomio de cuarto grado que solo tenga una raíz triple.
- h) El resultado de operar y simplificar la expresión siguiente es un número:

$$\left(\frac{2x + y}{x} - \frac{x^2 + y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y}{x} - \frac{x}{y}\right) + \frac{2y}{x + 2y}$$

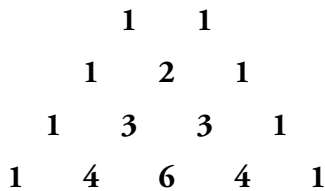
- a) Falso. Su grado será 5. Por ejemplo: $x^3 \cdot (x^2 + 2) = x^5 + 2x^3$
- b) Falso. Por ejemplo: $P(x) = x^2 + 1$, $P(0) = 1$, pero no es divisible por $(x - 1)$
- c) Falso. Por ejemplo: $P(x) = x^3 + 1$; $Q(x) = -x^3 + x^2 - 3$
 $P(x) + Q(x) = x^2 - 2$, que tiene grado 2.
- d) Verdadero.
- e) Verdadero.
- f) Falso. Si $a = -1 = b$, por ejemplo, tenemos $-x^2 - x + 2$, que tiene raíz en $x = 1$.
- g) Verdadero.
- h) Verdadero.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x + y}{x} - \frac{x^2 + y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y}{x} - \frac{x}{y}\right) + \frac{2y}{x + 2y} = \left(\frac{2xy + y^2 - x^2 - y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y^2 - x^2}{xy}\right) + \frac{2y}{x + 2y} = \\ & = \frac{(2xy - x^2) \cdot xy}{xy(4y^2 - x^2)} + \frac{2y}{x + 2y} = \frac{2xy - x^2}{(x + 2y)(2y - x)} + \frac{2y}{x + 2y} = \frac{2xy - x^2 + 4y^2 - 2xy}{(2y + x)(2y - x)} = \\ & = \frac{4y^2 - x^2}{(2y + x)(2y - x)} = \frac{(2y + x)(2y - x)}{(2y + x)(2y - x)} = 1 \end{aligned}$$

Busca regularidades y generaliza

Triángulos y potencias

Observa, comprueba y compara:



$$(a + b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

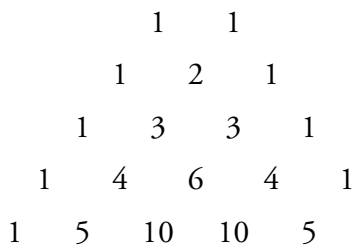
$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$



- ¿Sabrías añadir una fila más a este triángulo numérico?

(Se conoce como triángulo de Tartaglia).

- ¿Sabrías escribir el desarrollo polinómico de $(a + b)^5$ sin necesidad de multiplicar el binomio $(a + b)$ por sí mismo cinco veces?

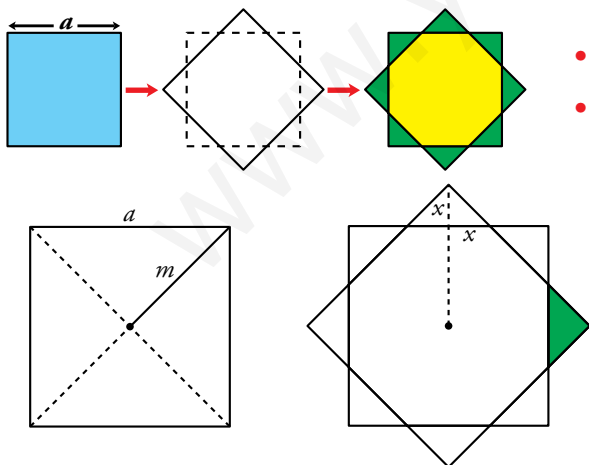


$$\rightarrow (a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

Utiliza el lenguaje algebraico

Cuadrado y octógono

Suponiendo conocida la longitud, a , del lado del cuadrado azul:



- Calcula el área del octógono amarillo.
- Calcula, también, el área de la estrella.

$$m^2 + m^2 = a^2 \rightarrow m = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$x = m - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{Área del triángulo sombreado} \rightarrow A_T = \frac{2x \cdot x}{2} = x^2 = \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2})$$

$$\text{Área del cuadrado} \rightarrow A_C = a^2$$

$$\text{Área del octógono} \rightarrow A_O = A_C - 4A_T = a^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) = 2a^2(\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{Área de la estrella} \rightarrow A_E = A_C + 4A_T = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) = 2a^2(2 - \sqrt{2})$$

Reflexiona y exprésate

¡Curioso!

Piensa tres dígitos que no sean los tres iguales \longrightarrow Por ejemplo, 5, 8 y 3.

Forma con ellos el mayor número $\boxed{x} \boxed{y} \boxed{z} \longrightarrow$ El número mayor 853

Forma el menor $\boxed{z} \boxed{y} \boxed{x} \longrightarrow$ El número menor 358

Réstalos $\boxed{x} \boxed{y} \boxed{z} - \boxed{z} \boxed{y} \boxed{x} \longrightarrow$ La diferencia $853 - 358 = 495$

- Comprueba que la diferencia es siempre múltiplo de 9 y de 11.
- Demuestra, utilizando el lenguaje algebraico, que la observación anterior es cierta para cualquier trío de cifras, x , y , z , siendo distintas al menos dos de ellas.

 Ayuda:

$$\boxed{x} \boxed{y} \boxed{z} = 100x + 10y + z$$

$$\boxed{z} \boxed{y} \boxed{x} = 100z + 10y + x$$

$$\boxed{x} \boxed{y} \boxed{z} - \boxed{z} \boxed{y} \boxed{x} = (100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 99x - 99z = 99(x - z)$$

La diferencia siempre es múltiplo de 99 y, por tanto, lo es de 9 y de 11.

Entrénate resolviendo problemas

- En cada operación, sustituye cada letra por una cifra distinta de cero.

$$\begin{array}{r}
 yz \\
 yz \\
 yz \\
 yz \\
 + yz \\
 \hline
 xyz
 \end{array}$$

Atendiendo a la columna de las unidades, vemos que el valor $5z$ termina en 0 o en 5.

Como $z \neq 0 \rightarrow z = 5$ y “nos llevamos 2”.

Atendiendo a la columna de las decenas, $5y + 2$ termina en y . Esa condición solo se cumple para $y = 2$ e $y = 7$.

Si $y = 2$, $5y + 2 = 12$. Sería $x = 1$. Si $y = 7$, y $5y + 2 = 37$. Sería $x = 3$.

Concluimos que hay dos soluciones: $x = 1, y = 2, z = 5$ y $x = 3, y = 7, z = 5$.

$$\begin{array}{r}
 ab \\
 \times c \\
 \hline
 de \\
 + fg \\
 \hline
 hi
 \end{array}$$

Por tanteo, se llega a la solución:

$$a = 1, b = 7, c = 4, d = 6, e = 8, f = 2, g = 5, h = 9, i = 3$$

- Resuelve estos problemas sin utilizar el álgebra:

a) Un estanque se alimenta de dos bocas de agua. Abriendo solamente la primera, el estanque se llena en 8 horas y, abriendo ambas, en 3 horas. ¿Cuánto tarda en llenarse si se abre solo la segunda boca?

b) En una balsa hay un grifo y un sumidero. El sumidero vacía la balsa en 2 horas.

Un día, sin darnos cuenta, y estando la balsa llena, abrimos el sumidero pero dejamos el grifo abierto. La balsa tardó 5 horas en vaciarse.

¿Cuánto tarda el grifo en llenar la balsa?

a) La primera boca llena el estanque en 8 horas. Por tanto, cada hora llena $\frac{1}{8}$ de estanque.

Las dos bocas juntas llenan el estanque en 3 horas. Por tanto, cada hora llenan $\frac{1}{3}$ de estanque.

La segunda boca llenará, cada hora, $\frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$ de estanque.

Si en una hora la segunda boca llena $\frac{5}{24}$ de estanque, en llenarlo tardará:

$$\frac{24}{5} \text{ horas} = 4 \text{ h } 48 \text{ min}$$

b) El sumidero vacía la balsa en 2 horas \rightarrow En una hora vacía $\frac{1}{2}$ de balsa.

La balsa se vacía, con sumidero y grifo abiertos, en 5 horas \rightarrow Cada hora se vacía $\frac{1}{5}$ de balsa.

El grifo llena, cada hora, $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ de balsa.

El grifo tarda en llenar la balsa $\frac{10}{3}$ horas = 3 h + $\frac{1}{3}$ de hora = 3 h 20 min.

Autoevaluación

1. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{(x-2)(x+1)}{3} - \frac{(3x-1)^2}{8} + \frac{(2x-3)(2x+3)}{12}$$

mín.c.m. (3, 8, 12) = 24

$$24 \left[\frac{(x-2)(x+1)}{3} - \frac{(3x-1)^2}{8} + \frac{(2x-3)(2x+3)}{12} \right] =$$

$$= 8(x^2 - x - 2) - 3(9x^2 - 6x + 1) + 2(4x^2 - 9) =$$

$$= 8x^2 - 8x - 16 - 27x^2 + 18x - 3 + 8x^2 - 18 = -11x^2 + 10x - 37$$

2. Halla el cociente y el resto de esta división:

$$(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$$

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 \\ -3x^4 - 6x^2 \\ \hline -5x^3 - 2x^2 \\ + 10x \\ \hline -2x^2 + 10x \\ + 4 \\ \hline 10x + 3 \end{array}$$

COCIENTE: $3x^2 - 5x - 2$

RESTO: $10x + 3$

3. El polinomio $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 2x - 24$ es divisible por $x - a$ para dos valores enteros de a . Búscalos y da el cociente en ambos casos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ & & -4 & 24 & -4 & 24 \\ \hline & 1 & -6 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Es divisible por $x + 4$.

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + x - 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 6 & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ & & 6 & 24 & 6 & 24 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Es divisible por $x - 6$.

COCIENTE: $x^3 + 4x^2 + x + 4$

4. Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 7 & -m & 3 & -2 \\ & & -7 & 7+m & -10-m \\ \hline & 7 & -7-m & 10+m & -12-m \end{array}$$

$$-12 - m = 0 \rightarrow m = -12$$

5. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 12x^3 + 36x^2$

b) $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

a) $x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^2(x^2 - 12x + 36)$

$$x^2 - 12x + 36 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^2(x - 6)^2$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 \text{b)} & 2 & 5 & -4 & -3 \\
 1 & & 2 & 7 & 3 \\
 \hline
 & 2 & 7 & 3 & 0 \\
 -3 & & -6 & -3 & \\
 \hline
 & 2 & 1 & 0 &
 \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = (x - 1)(x + 3)(2x + 1)$$

6. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$

b) $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

a) $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \frac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \frac{xy}{5}$

b) $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \frac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \frac{b}{a}$

7. Efectúa, y simplifica si es posible.

a) $\frac{2x^2}{x - 3} : \frac{8}{x^3 - 3x^2}$

b) $\frac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \frac{x - 3}{x - 2}$

c) $\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{2a + 1}{a^3 - a}$

a) $\frac{2x^2}{x - 3} : \frac{8}{x^3 - 3x^2} = \frac{2x^2 \cdot x^2(x - 3)}{8 \cdot (x - 3)} = \frac{x^4}{4}$

b) $\frac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \frac{x - 3}{x - 2} = \frac{x^2 - 6 - (x - 3)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 6 - x^2 + 5x - 6}{(x - 2)^2} = \frac{5x - 12}{(x - 2)^2}$

c) $\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{a^2 - 1}{a(a^2 - 1)} - \frac{a^2}{a(a^2 - 1)} + \frac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{a^2 - 1 - a^2 + 2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{2}{a^2 - 1}$

8. Halla a y b para que al dividir $x^3 + ax^2 + bx - 4$ entre $x + 1$ el resto sea -10 , y al dividirlo entre $x - 2$ el resto sea 2 .

$P(-1) = -10 = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 4 = -1 + a - b - 4 \rightarrow a - b = -5$

$P(2) = 2 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 8 + 4a + 2b - 4 \rightarrow 4a + 2b = -2$

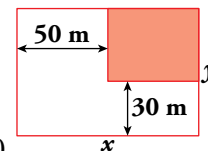
Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a - b = -5 \rightarrow 2a - 2b = -10 \\ 4a + 2b = -2 \rightarrow 4a + 2b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r}
 2a - 2b = -10 \\
 4a + 2b = -2 \\
 \hline
 6a = -12 \rightarrow a = -2
 \end{array}$$

$-2 - b = -5 \rightarrow -2 + 5 = b \rightarrow b = 3$

9. En una parcela de lados x e y se construye una casa, en la zona que se indica en el dibujo.



Expresa, en función de x e y , el área de la zona no edificada.

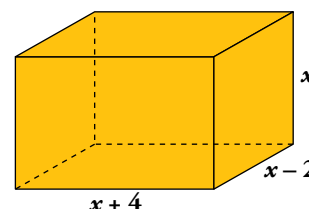
$A = xy - (x - 50)(y - 30) = xy - xy + 50y + 30x - 1500 = 50y + 30x - 1500$

$A = (30x + 50y - 1500) \text{ m}^2$

10. Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro:

Volumen: $V = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$

Área: $A = 2(x + 4)(x - 2) + 2(x - 2)x + 2(x + 4)x$



Autoevaluación

1. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{(x-2)(x+1)}{3} - \frac{(3x-1)^2}{8} + \frac{(2x-3)(2x+3)}{12}$$

mín.c.m. (3, 8, 12) = 24

$$24 \left[\frac{(x-2)(x+1)}{3} - \frac{(3x-1)^2}{8} + \frac{(2x-3)(2x+3)}{12} \right] =$$

$$= 8(x^2 - x - 2) - 3(9x^2 - 6x + 1) + 2(4x^2 - 9) =$$

$$= 8x^2 - 8x - 16 - 27x^2 + 18x - 3 + 8x^2 - 18 = -11x^2 + 10x - 37$$

2. Halla el cociente y el resto de esta división:

$$(3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 + 2)$$

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 \\ -3x^4 \quad \quad -6x^2 \\ \hline -5x^3 - 2x^2 \\ \quad 5x^3 \quad \quad + 10x \\ \quad \quad -2x^2 + 10x \\ \quad \quad \quad 2x^2 \quad \quad + 4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 10x + 3 \end{array}$$

COCIENTE: $3x^2 - 5x - 2$

RESTO: $10x + 3$

3. El polinomio $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 2x - 24$ es divisible por $x - a$ para dos valores enteros de a . Búscalos y da el cociente en ambos casos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ -4 & & -4 & 24 & -4 & 24 \\ \hline & 1 & -6 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Es divisible por $x + 4$.

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + x - 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ 6 & & 6 & 24 & 6 & 24 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Es divisible por $x - 6$.

COCIENTE: $x^3 + 4x^2 + x + 4$

4. Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 7x^3 - mx^2 + 3x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 7 & -m & 3 & -2 \\ -1 & & -7 & 7+m & -10-m \\ \hline & 7 & -7-m & 10+m & -12-m \end{array}$$

$$-12 - m = 0 \rightarrow m = -12$$

5. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 12x^3 + 36x^2$

b) $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

a) $x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^2(x^2 - 12x + 36)$

$$x^2 - 12x + 36 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^2(x - 6)^2$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 \text{b)} & 2 & 5 & -4 & -3 \\
 1 & & 2 & 7 & 3 \\
 \hline
 & 2 & 7 & 3 & 0 \\
 -3 & & -6 & -3 & \\
 \hline
 & 2 & 1 & 0 &
 \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = (x - 1)(x + 3)(2x + 1)$$

6. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$

b) $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

a) $\frac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \frac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \frac{xy}{5}$

b) $\frac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \frac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \frac{b}{a}$

7. Efectúa, y simplifica si es posible.

a) $\frac{2x^2}{x - 3} : \frac{8}{x^3 - 3x^2}$

b) $\frac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \frac{x - 3}{x - 2}$

c) $\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{2a + 1}{a^3 - a}$

a) $\frac{2x^2}{x - 3} : \frac{8}{x^3 - 3x^2} = \frac{2x^2 \cdot x^2(x - 3)}{8 \cdot (x - 3)} = \frac{x^4}{4}$

b) $\frac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \frac{x - 3}{x - 2} = \frac{x^2 - 6 - (x - 3)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 6 - x^2 + 5x - 6}{(x - 2)^2} = \frac{5x - 12}{(x - 2)^2}$

c) $\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{a^2 - 1}{a(a^2 - 1)} - \frac{a^2}{a(a^2 - 1)} + \frac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{a^2 - 1 - a^2 + 2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \frac{2}{a^2 - 1}$

8. Halla a y b para que al dividir $x^3 + ax^2 + bx - 4$ entre $x + 1$ el resto sea -10 , y al dividirlo entre $x - 2$ el resto sea 2 .

$P(-1) = -10 = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 4 = -1 + a - b - 4 \rightarrow a - b = -5$

$P(2) = 2 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 8 + 4a + 2b - 4 \rightarrow 4a + 2b = -2$

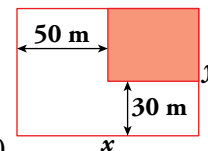
Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a - b = -5 \rightarrow 2a - 2b = -10 \\ 4a + 2b = -2 \rightarrow 4a + 2b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r}
 2a - 2b = -10 \\
 4a + 2b = -2 \\
 \hline
 6a = -12 \rightarrow a = -2
 \end{array}$$

$-2 - b = -5 \rightarrow -2 + 5 = b \rightarrow b = 3$

9. En una parcela de lados x e y se construye una casa, en la zona que se indica en el dibujo.



Expresa, en función de x e y , el área de la zona no edificada.

$A = xy - (x - 50)(y - 30) = xy - xy + 50y + 30x - 1500 = 50y + 30x - 1500$

$A = (30x + 50y - 1500) \text{ m}^2$

10. Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro:

Volumen: $V = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$

Área: $A = 2(x + 4)(x - 2) + 2(x - 2)x + 2(x + 4)x$

