MATRICES Y DETERMINANTES

1.- Determine los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sol: X = -5/4 Y=-7/4

2.- Determine la matriz X de dimensiones 2x2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol: $X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$

3.- Un importador de globos los importa de dos colores. Naranja y rojo y los envía en paquetes de 2, 5 y 10 unidades que vende a los siguientes precios:

	2 unidades	5 unidades	10 unidades
Naranja	4	8	12
Rojo	3	5	8

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Naranja	Rojo
2 unidades	700.000	50.000
5 unidades	600.000	40.000
10 unidades	500.000	500.000

Se pide:

a) Resumir la información anterior en dos matrices A y B: A será una matriz que recoja las ventas en un año y B será una matriz que recoja los precios.

b) Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz A * B y dar su significado.

c) Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz B * A y dar su significado.

4.- Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hallar las matrices X e Y tales que:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = M \\ -3X + 4Y = -2N \end{cases}$$

Sol: $X = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ 16 & -10 & 8 \\ -12 & -8 & -8 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 10 & -8 & 5 \\ -9 & -6 & -7 \end{pmatrix}$

5.-Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sol: $\begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Hallar $\left[A^t \cdot A^{-1}\right]^2 \cdot A$.

6.- Determinar una matriz X tal que $A+2XB=C$ siendo:

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Sol: X=$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

7.- Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que $A^2=2A-I$ donde I es la matriz identidad. →Sí se cumple
b) Halla las matrices A^3 y A^4 y exprésalas en función de A e I.

Sol: $A^3=3A-2I$; $A^4=4A-3I$

8.- Discutir y resolver, si es posible, en función del valor del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ x+(\lambda+1)y+z=0 \\ x+y+(\lambda+1)z=0 \end{array}\right\}$$

Sol: Si $\lambda\neq 0$ ó $\lambda\neq 2$ el sistema es S.C.D ; Si $\lambda=0$ ó $\lambda=2$ el sistema es S.C.I

9.- Calcúlese la matriz X tal que $AX=A+B$ siendo:

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sol: $X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

10.- Sean las matrices:

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Calcula el producto $A\cdot B^t\cdot B\cdot A^t$.

Sol: Da la matriz de 1x1 cero, o el número cero

11.- Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{array}\right\}$$

a) Discútase el sistema según los valores de a.
b) Resuélvase el sistema para a = – 1.

12.- Sea: $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

Hallar las matrices B de orden 2 x 2 tales que:

a) $A\cdot B=0$

b) $A\cdot B=B\cdot A=0$

Sol: a) $B=\begin{pmatrix}a & b\\ -2a & -2d\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ -2a & 0\end{pmatrix}$

13.-Dadas las matrices:

$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

hallar la inversa de A – B y la matriz X tal que $X\cdot(A-B)=A+B$.

Sol: $X=\begin{pmatrix}7 & -10\\ -4 & 7\end{pmatrix}$

14.- Calcula el rango de la matriz:

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & -1 & -2 & -3\\ 5 & 3 & 6 & 7\end{pmatrix}$ →Sol: Rg A=3

15.- Determina los valores de m para los cuales:

$X=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ verifique $X^2-\frac{5}{2}X+I=0$.

Sol: Se cumple para $m=2$ y $m=\frac{1}{2}$

16.- Sabiendo que $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ x & y & z\end{vmatrix}=5$ calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a+7 & b+7 & c+7\\ x/2 & y/2 & z/2\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ x & y & z\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

Sol: a) $\frac{5}{2}$ b) 5

17.- Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sean compatibles:

a) $$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{array}\right\}$$

Sol: Si $m \neq 0$ ó $m \neq 1$ el sistema es S.C.D ; Si $m=0$ el sistema es S.C.I; Si $m=1$ es S.I

b) $$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=a^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3a \end{array}\right\}$$

Sol: Si $a \neq 2$ el sistema es S.I ; Si $a=2$ el sistema es S.C.D

c) $$\left.\begin{array}{l} (1-k)x+y=0 \\ x+(1-k)y+z=0 \\ y+(1-k)z=0 \end{array}\right\}$$

Sol: Si $k \neq 1$ el sistema es S.C.D ; Si $k=1$ el sistema es S.C.I;

18.- Hallar, si existe, una matriz cuadrada 2 x 2, A, que cumpla las siguientes condiciones:

1) Coincide con su traspuesta.
2) Verifica la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Su determinante vale 9.

19.- Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=(a-1)(a+2) \\ x+ay+z=(a-1)^2(a+2) \\ x+y+az=(a-1)^3(a+2) \end{array}\right\}$$

a) Comprobar que es compatible para todo valor de a.
b) Resolverlo para a = –2.

20.- Determina para que valores de x tiene inversa la matriz y calcúlala.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$$ →Sol: Si $x=0$ no tiene inversa y si $x \neq 0$ tiene inversa.

21.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, calcular las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.
Obtener razonadamente A^n para n > 5.

Sol: A partir de A^3 la matriz es nula→ $A^n = O$

22.- Se dice que dos matrices cuadradas, A y B, de orden n x n, son semejantes si existe una matriz inversible, P, tal que, $B = P^{-1}\cdot A\cdot P$, donde P^{-1} denota la matriz inversa de P. Determine si son semejantes las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Sol: No son semejantes porque solo lo verifica si la matriz P, es la matriz nula.

23.- Calcula el valor de la matriz X sabiendo que:

2A – AX = BX siendo $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$

Sol: $X=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

24.- Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los diferentes valores del parámetro **a,** y resolverlo cuando sea posible:

$$\begin{cases}x-y=5\\y+z=a\\x-2z=3\\2x-3z=a\end{cases}$$