

CONTROL MATRICES Y DETERMINANTES

1.- Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden 2.

a) Calcula los valores de $\lambda \in \mathfrak{R}$ tales que $|A - \lambda I| = 0$ (1,25 puntos)

b) Calcula $A^2 - 7A + 10I$ (1,25 puntos)

2.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3. (1 punto)

b) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $m = -1$ (1,5 puntos)

3.- Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula, si existe,

el valor de k para el cual $(A - kI)^2$ es la matriz nula. (2 puntos)

4.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$ y utilizando correctamente las propiedades de

los determinantes, calcula:

(3 puntos)

a) $\begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

SOLUCIONES

1.- Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden 2.

a) Calcula los valores de $\lambda \in \mathfrak{R}$ tales que $|A - \lambda I| = 0$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2$$

$$(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0 \Rightarrow 12 - 3\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases} \quad \text{Para } \lambda = 2 \text{ o } \lambda = 5$$

b) Calcula $A^2 - 7A + 10I$; $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 7A + 10I = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

2.- a) Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = m^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2(m^2 + m + 1 - m - m - m) = 0$$

$$m^2(m^2 - 2m + 1) = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \rightarrow r(A) < 3 \quad \text{para } m=0 \text{ ó } m=1$$

b) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $m=-1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4; A^{-1} = \frac{1}{4} (\text{Adj}(A))^t$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2; A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0; A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

3.- Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula, si existe,

el valor de k para el cual $(A - kI)^2$ es la matriz nula.

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix}$$

Observamos que para $k=1 \Rightarrow (A - kI)^2 = O$

4.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$ y utilizando correctamente las propiedades de

los determinantes, calcula:

a)

$$\begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3d & 3f & 3b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} - 0(F_2 = 3F_1) = (C_2 \leftrightarrow C_3) + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

$$b) \begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix} = (F_1 \leftrightarrow F_2) - \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = (C_3 \leftrightarrow C_1) + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

$$c) \begin{vmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-g & b-h & c-i \\ 2g & 2h & 2i \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -g & -h & -i \\ d & e & c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -4$$

Dos filas proporcionales