

EXAMEN DE MATRICES Y DETERMINANTES

1) Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, haciendo uso de las propiedades de los determinantes:

(a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$ (1 punto) (b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$ (0,75 puntos)

(c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$ (0,75 puntos)

2) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B \cdot X + C$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2,5 puntos)

3) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

(a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k . (1,25 puntos)

(b) Para $k = 0$. Halla la matriz inversa de A . (1,25 puntos)

4) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot X \cdot B = C$, donde X es una matriz de orden

2×2 .

(1,25 puntos)

(b) Resuelve el sistema $\left. \begin{matrix} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{matrix} \right\}$, siendo X e Y dos matrices de orden

2×2 .

(1,25 puntos)

SOLUCIONES

1) Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, haciendo uso de las propiedades de los

determinantes:

$$(a) |-3A| = \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -3d & -3e & -3f \\ -3g & -3h & -3i \end{vmatrix} = (-3)^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -27 \cdot 2 = -54$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

$$(b) \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = (C_1 \leftrightarrow C_3) - 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = -4$$

$$(c) \begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & -c \\ d & e & -f \\ g & h & -i \end{vmatrix} = 0(C_1 = C_3) - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot X = B \cdot X + C \rightarrow A \cdot X - B \cdot X = C \rightarrow (A - B) \cdot X = C \rightarrow X = (A - B)^{-1} C$$

$$M = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = 2 \rightarrow M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - B)^{-1} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) \text{ Dada la matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$$

(a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{vmatrix} = k + 9 + 7k^2 - k - 3k^2 - 21 = 4k^2 - 12 = 0 \rightarrow 4k^2 = 12 \rightarrow k = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Para } k = \sqrt{3} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 3 \\ 1 & 7 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

$$\text{Para } k = -\sqrt{3} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) = 2$$

$$\text{Para } k \neq \pm\sqrt{3} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow r(A) = 3$$

(b) Para $k = 0$. Halla la matriz inversa de A .

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12 \rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

4) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot X \cdot B = C$, donde X es una matriz de orden

$$2 \times 2. \quad A \cdot X \cdot B = C \rightarrow A^{-1} A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$|A| = -4; A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 3; B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4X - 4Y = -2A \\ 4X + 3Y = B \end{cases} \rightarrow -Y = -2A + B \rightarrow Y = 2A - B$$

$$Y = 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases} \rightarrow 2X = A - 2Y = A - 2(2A - B) = -3A + 2B \rightarrow X = \frac{1}{2}(2B - 3A)$$

$$X = \frac{1}{2} \left[2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$