MATRICES Y SISTEMAS

1.- ***(3 puntos)*** **De una matriz** $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **se sabe que** $|A|=4$**. De otra matriz *B* cuadrada de orden 2 se sabe que** $|B|=\dfrac{1}{2}$

a) **Calcular razonadamente (indicando las propiedades que utilices) los determinantes de** $-3A^t$; $A^{-1}(2A)$; $\begin{pmatrix} -6b & 2a \\ -3d & c \end{pmatrix}$

b) **Calcular razonadamente el rango de la matriz** $C=\left(B^t\cdot A\cdot B\right)^{2017}$

Solución:

a) Ver propiedades de los determinantes:

$\left|-3A^t\right|=(-3)^2\left|A^t\right|=9|A|=36$

$\left|A^{-1}(2A)\right|=\left|A^{-1}\right|\cdot|2A|=\dfrac{1}{|A|}\cdot 2^2\cdot|A|=\dfrac{1}{4}\cdot 4\cdot 4=4$

$\begin{vmatrix} -6b & 2a \\ -3d & c \end{vmatrix}=$ Se han cambiado las dos columnas (cambio de signo), se ha multiplicado una fila por 2 y una columna por -3, luego $\begin{vmatrix} -6b & 2a \\ -3d & c \end{vmatrix}=(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot|A|=24$

b) Calculamos el determinante (usando las propiedades):

$\left|B^t\cdot A\cdot B\right|=\left|B^t\right|\cdot|A|\cdot|B|=|B|\cdot|A|\cdot|B|=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\dfrac{1}{2}=1$

Luego $|C|=\left|\left(B^t\cdot A\cdot B\right)^{2017}\right|=\left|\left(B^t\cdot A\cdot B\right)\right|^{2017}=1^{2017}=1$

Por tanto, como es una matriz cuadrada de orden dos y su determinante es distinto de 0 se tiene que $Rg(C)=2$

2.- ***(3 puntos)*** **Resolver la ecuación matricial** $XA-B=X$

siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

Despejamos primero en la ecuación matricial:

$$XA-B=X \Rightarrow XA-X=B \Rightarrow X\left(A-I\right)=B$$

Llamando $C=A-I$ tenemos $X\cdot C=B \Rightarrow X\cdot C\cdot C^{-1}=B\cdot C^{-1} \Rightarrow X=B\cdot C^{-1}$

Calculamos por tanto la matriz C y su inversa:

$$C=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&2&0\\1&2&2\end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante: $|C|=\begin{vmatrix}2&0&0\\2&2&0\\1&2&2\end{vmatrix}=8$

Y sus adjuntos:

$$C_{11}=\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}=4 \;;\; C_{12}=-\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}=-4 \;;\; C_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix}=2$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix}0&0\\2&2\end{vmatrix}=0 \;;\; C_{22}=\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}=4 \;;\; C_{23}=-\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}=-4$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix}0&0\\2&0\end{vmatrix}=0 \;;\; C_{32}=-\begin{vmatrix}2&0\\2&0\end{vmatrix}=0 \;;\; C_{33}=\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}=4$$

Por lo que su matriz adjunta será $C^{adj}=\begin{pmatrix}4&-4&2\\0&4&-4\\0&0&4\end{pmatrix}$

Y su inversa: $C^{-1}=\dfrac{\left(C^{adj}\right)^t}{|C|}=\dfrac{\begin{pmatrix}4&0&0\\-4&4&0\\2&-4&4\end{pmatrix}}{8}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Y la matriz X: $X=B\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&-4\\0&-2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&2&-2\\2&-3&2\end{pmatrix}$

3.- *(4 puntos)*

Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores del parámetro *a*:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+3z=1 \\ x+y+2z=0 \\ x+y+(2-a)z=a \end{array}\right\}$$

Razona si existe algún valor de *a* para el que (0, 2,-1) es solución del sistema anterior

Solución:

Calculamos la matriz de los coeficientes y su determinante:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A|=a^2-a$$

Si igualamos a 0: $a^2-a=0 \;\Rightarrow\; a=0\,,\; a=1$

Discutimos el sistema usando el Teorema de Rouché:

- Si $a\neq 0{,}1 \;\Rightarrow\; RgA=3$

  Como la matriz ampliada puede tener rango máximo 3 e incluye a A, $\Rightarrow \; Rg(A')=3$

  Por tanto: $Rg(A)=Rg(A')=3=n^o\ incógnitas \;\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

- Si $a=0 \;\Rightarrow\; A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

  Buscamos un menor de orden 2 distinto de 0, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \;\Rightarrow\; Rg(A)=2$

  Por otra parte: $A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

  Como tiene dos filas iguales, todos sus menores de orden 3 son nulos $\;\Rightarrow\; Rg(A')=2$

  Por tanto: $Rg(A)=Rg(A')=2<n^o\ incógnitas \;\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

- Si $a=1 \;\Rightarrow\; A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  Buscamos un menor de orden 2 distinto de 0, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \;\Rightarrow\; Rg(A)=2$

  Por otra parte: $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Buscamos un menor de orden 3 distinto de 0, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow Rg(A') = 3$

Por tanto: $Rg(A) \neq Rg(A') \Rightarrow$ Sistema Incompatible

Resolvemos ahora en los casos en que el sistema es compatible:

- Si $a = 0$ el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 3z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = \text{ª}, \quad x = 1 - 3\text{ª}, \quad y = -2\text{ª} - (1 - 3\text{ª}) = \text{ª} - 1$$

Luego las infinitas soluciones del sistema son: $(1 - 3\text{ª}, \text{ª} - 1, \text{ª})$

- Si $a \neq 0{,}1$, al ser un Sistema Compatible Determinado, lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2 - a + 2a^2 - 3a - 2}{a^2 - a} = \frac{2a^2 - 4a}{a^2 - a} = \frac{a(2a-4)}{a(a-1)} = \frac{2a-4}{a-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 2-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3a + 2 - 2 + a - 2a}{a^2 - a} = \frac{2a}{a^2 - a} = \frac{2a}{a(a-1)} = \frac{2}{a-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a + 1 - 1 - a^2}{a^2 - a} = \frac{-a^2 + a}{a^2 - a} = -1$$

Es decir, la solución de cada sistema con $a \neq 0{,}1$ es $\left(\frac{2a-4}{a-1}, \frac{2}{a-1}, -1\right)$

La solución **(0, 2,-1)** puede aparecer tanto en el caso de sistema compatible indeterminado como en el de sistema compatible determinado.

En el primer caso, con $a = 0$, las soluciones eran $(1 - 3\text{ª}, \text{ª} - 1, \text{ª})$

Tendría que ser $\text{ª} = -1$, pero entonces daría $(4,-2,-1)$, que no es la solución pedida

En el segundo caso, con $a \neq 0{,}1$, la solución es $\left(\frac{2a-4}{a-1}, \frac{2}{a-1}, -1\right)$

Si la igualamos a (0, 2,-1):

$$\frac{2a-4}{a-1} = 0 \Rightarrow 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{2}{a-1} = 2 \Rightarrow 2 = 2a - 2 \Rightarrow a = 2$$

Luego si $a = 2$, existe un sistema compatible determinado cuya solución es precisamente (0, 2,-1)