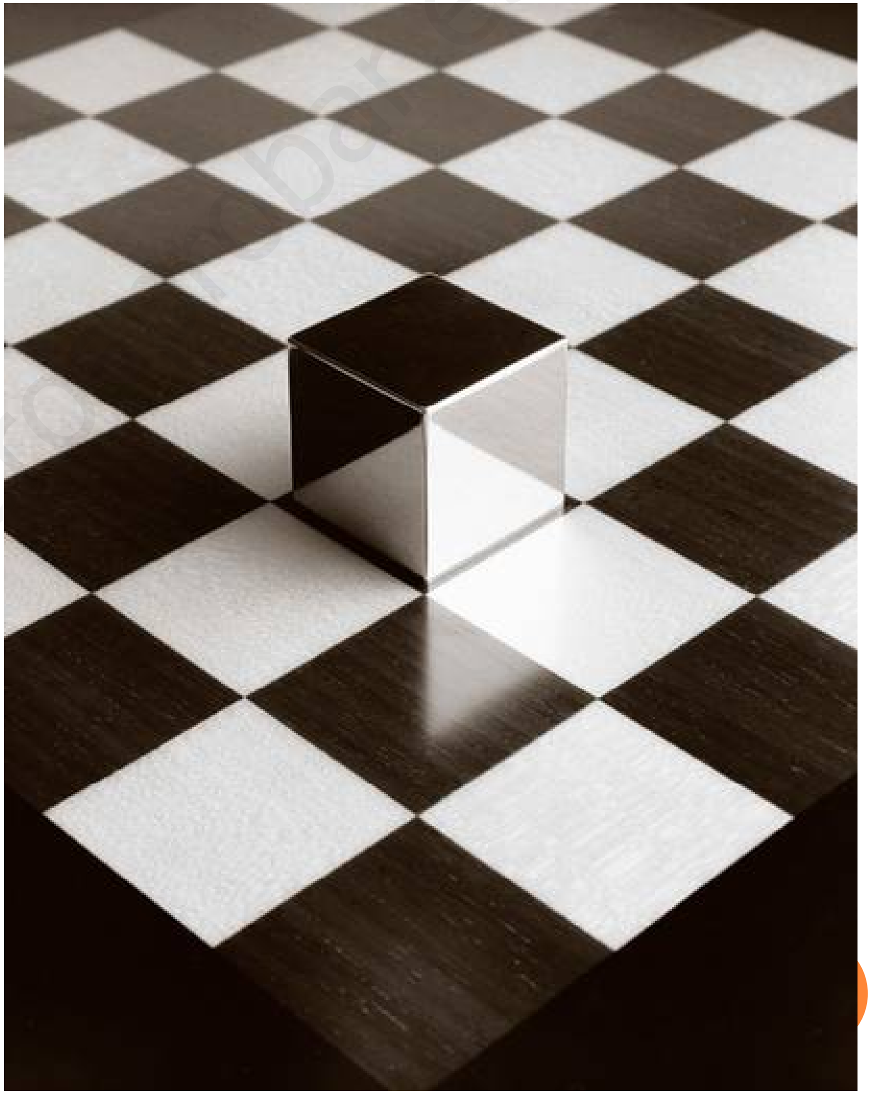
MATRICES Y DETERMINANTES



MATRICES Y DETERMINANTES

Para que sirven las matrices

En la vida diaria el concepto de matrices es de gran relevancia, ya que las matrices se usan como contenedores para almacenar datos que están relacionados.

Las matrices se encuentran en aquellos ámbitos en los que se trabaja con datos regularmente ordenados y aparecen en situaciones propias de las Ciencias Sociales , Económicas y Ciencias (Física, Química Biología…..) y muchos más.

- En la computación gráfica, las matrices son ampliamente usadas para lograr animaciones de objetos y formas. Las matrices se usan regularmente en todas las formas de cifrado, tanto en programación de computadoras como en criptología.

- Biología. Tablas nutricionales.
- Medicina. Utilizacion de medicamentos antihipertensivos en pacientes con hipertension arterial

- En este curso las usaremos para resolver sistemas de ecuaciones con tres variables y para geometría.

- Pero la pregunta que todos estáis planteándoos:

¿PERO SIRVEN PARA COMPRAR EN EL SUPERMERCADO?

-. https://www.youtube.com/watch?v=IwdHftE8RJI

MATRICES Y DETERMINANTES

Definición de matriz

Una matriz es una tabla numérica rectangular.

Se llama **matriz** de dimensión ***m×n*** a todo conjunto rectangular de números reales dispuestos en ***m*** líneas horizontales (filas) y ***n*** líneas verticales (columnas) de la forma:

2ª columna

3ª fila

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \boxed{a_{mn}} \end{pmatrix}}_{\text{Columnas de la matriz } A} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} \text{Filas de la matriz } A$$

Dimensión de la matriz $m \times n$

MATRICES Y DETERMINANTES

TIPOS DE MATRICES:

- ***Matriz cuadrada:*** Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir ***m = n***. En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden *n*, y no ***n x n***. En el ejemplo de abajo tenemos una matriz de orden 4

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- ***Matriz rectangular:*** Es aquella que m≠n Matriz rectangular de dimensión 3x4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

TIPOS DE MATRICES:

- ***Matriz fila o vector fila:*** Es una matriz que solo tiene una fila, es decir *n=1* y por tanto es de dimensión ***1 x n.***

$$A_{1x4} = (2\ 5\ 0\ 5)$$

- ***Matriz columna o vector columna:*** Es una matriz que solo tiene una columna, es decir, m =1 y por tanto es de orden **m x 1**.

$$A_{3x1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Una matriz se puede interpretar como un conjunto de vectores fila o columna

- ***Matriz nula*** a la que tiene todos los elementos cero.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula de tamaño 2x5.

MATRICES Y DETERMINANTES

DEFINICIONES PARA MATRICES CUADRADAS:

- ***<u>Diagonal principal</u>*** : *son los elementos* a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn}

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

- ***<u>Diagonal secundaria :</u>*** son los elementos aij con $i+j = n+1$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

- ***<u>Traza :</u>*** *suma de los elementos de la diagonal principal*

$$Tr\,(A)= a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

$$Tr(A)= 5+2+4+8=19$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Tipos de matrices(para cuadradas):

Matriz Triangular: Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal.

Las matrices triangulares pueden ser de dos tipos:

Triangular Superior: Si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Triangular Inferior: Si los elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 16 & -78 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Tipos de matrices (para cuadradas):

- ***Matriz diagonal:*** Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ***Matriz escalar:*** Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ***Matriz unidad o identidad:*** Es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1 Se nombra I_n Siendo n el orden de la matriz. Algunas matrices identidad son:

:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

TIPOS DE MATRICES:

- ***Matriz traspuesta:*** Dada una matriz A, se llama traspuesta de A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas o viceversa.

  Si A es de orden *nxm*, entonces A^t es de orden *m x n*.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la trasposición de matrices:

1ª.- Dada una matriz A, siempre existe su traspuesta y además **es única**.

2ª.- La traspuesta de la matriz traspuesta de A es A. ⇨ $\mathbf{(A^t)^t = A}$.

MATRICES Y DETERMINANTES

Tipos de matrices(para cuadradas):

- ***Matriz simétrica:*** Una matriz cuadrada *A* es simétrica si ***$A = A^t$,***

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

- ***Matriz antisimétrica:*** Una matriz cuadrada es antisimétrica si ***$A = -A^t$***

Siempre su diagonal principal es cero.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Matrices escalonadas

Fíjate en las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En ellas se cumple que:

- Si hay filas nulas, están situadas en la parte inferior de la matriz.
- En las filas no nulas, el primer elemento diferente de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila inmediatamente superior.

De ellas se dice que son **matrices escalonadas**.

MATRICES Y DETERMINANTES

Operaciones con matrices

Igualdad de matrices

Dos matrices A y B son ***iguales*** cuando contienen los mismos elementos, dispuestos en los mismos lugares

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & a \\ b & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Para que las matrices **A** y **B** sean iguales, se tiene que cumplir que **a = 7** y **b = 5**.

- ***Realizar los ejercicios 1 y 2 de la pag 35***

MATRICES Y DETERMINANTES

Operaciones con matrices

Suma y diferencia de matrices

Dadas dos matrices *A* y *B* de la misma dimensión m × n, la **matriz suma(diferencia)**, ***A + B***, (A-B) es la que se obtiene sumando los elementos que en cada una de ellas ocupan la misma posición.

$$A+B=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}+b_{11}} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A-B=A+(-B)$$

Ejemplo: Sumar y restar las dos matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ no se pueden sumar, al tener distinta dimensión

MATRICES Y DETERMINANTES

Propiedades de la suma de matrices

Sean A, B y C tres matrices del mismo orden.

1ª. $A + (B + C) = (A + B) + C$ ***Propiedad Asociativa***

2ª. $A + B = B + A$ ***Propiedad Conmutativa***

3ª. $A + 0 = A$ **(0 es la matriz nula)** ***Elemento Neutro***

4ª. $A + (– A) = (– A) + A = O$ ***Elemento opuesto***

La matriz –A (opuesta) se obtiene cambiando de signo los elementos de A.

MATRICES Y DETERMINANTES

Operaciones con matrices

Producto de una matriz por un número

Para multiplicar un número por una matriz se multiplica el número por todos los elementos de la matriz, obteniéndose otra matriz del mismo orden.

Ejemplo:

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{m1} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

El producto de la matriz *A* por el número real *k* se designa por *k·A*. Al número real *k* se le llama también escalar, y a este producto, *producto de escalares por matrices.*

Nota: *siempre que de forma sencilla se pueda sacar factor común, simplificando la matriz, se recomienda sacar éste, ya que se simplifican los cálculos, especialmente en la multiplicación de matrices,.*

Matriz opuesta

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Es aquella que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de la matriz A, y se escribe –A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Operaciones con matrices

Propiedades del producto de una matriz por un escalar

1ª. $k(A + B) = kA + kB$ — Distributiva respecto de la suma de matrices

2ª. $(k + d)A = kA + dA$ — Distributiva respecto de la suma de números

3ª $k\cdot(d\cdot A) = (k\cdot d)\cdot A$ — ***Propiedad asociativa***

4ª. $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$ — ***Elemento unidad***

El uso de estas propiedades en las diversas operaciones con matrices, al ser idénticas a las propiedades de la suma de números, nos permite trabajar con matrices del mismo modo que hacemos con números.

- ***Realizar el ejercicio1 de la pag 35***

MATRICES Y DETERMINANTES

Operaciones con matrices

Producto de una matriz fila por una matriz columna

Sea A una matriz fila y B una matriz columna:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1 x 3 3 x 1

Definimos el producto de la matriz A por la matriz B (en este orden):

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 2 - 6 + 5 = 1$$

1 x 3 3 x 1

Hemos emparejado cada elemento de *A* con un elemento de *B*, luego el número de estos elementos (nº de columnas de *A* y nº de filas de *B*) debe coincidir para poder realizar este producto.

Observa que el resultado es un número

- ***Realizar el ejercicio resuelto 1 y 2 de la pag 37***

MATRICES Y DETERMINANTES

Operaciones con matrices

Producto de matrices

*"Para multiplicar dos matrices **A** y **B**,* en este orden*, **A·B** , es condición indispensable que el número de columnas de **A** sea igual al número de filas de **B**"*

filas

$$A_{m,n} \cdot B_{n,p} = C_{m,p}$$

Posible

columnas

Si no se cumple esta condición, el producto ***A·B*** no puede realizarse, de modo que esta es una condición que debemos comprobar previamente a la propia multiplicación.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$ no se pueden multiplicar

MATRICES Y DETERMINANTES

Operaciones con matrices

Producto de matrices

La **matriz producto**, $\boldsymbol{A\cdot B}$, si existe, es la que se obtiene de la forma siguiente:

$$A\cdot B = \begin{array}{r}\mathrm{F}_1\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & \dots & a_{mk}\end{pmatrix}\cdot\begin{array}{c}\begin{array}{lll}\mathrm{C}_1 & \quad & \quad\end{array}\\ \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ b_{k1} & \dots & b_{kn}\end{pmatrix}\end{array} = \begin{pmatrix} F_1\cdot C_1 & \dots & F_1\cdot C_n\\ \dots & \dots & \dots\\ F_m\cdot C_1 & \dots & F_m\cdot C_n\end{pmatrix}$$

El elemento de esta matriz que ocupa la fila *i*-ésima y la columna *j*-ésima es el que se obtiene de multiplicar la fila Fi por la columna Cj.

"El elemento que se encuentra en la fila *i* y la columna *j* de la matriz $\boldsymbol{C = A\cdot B}$, se obtiene multiplicando los elementos de la fila *i* de $\boldsymbol{A}$ por la columna *j* de $\boldsymbol{B}$ y sumando los resultados"

MATRICES Y DETERMINANTES

Operaciones con matrices

Producto de matrices

EJEMPLO

1) Realizar el producto de matrices:

Para multiplicar las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

1º.- Comprobamos que se puede realizar el producto ***A·B***, pues el nº de columnas de ***A*** es 4 y el nº de filas de ***B*** también es 4.

$$\underset{2\times 4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}}$$

2º.- El resultado, según lo dicho será una matriz de dimensión 2 x 3, tiene 2 filas y 3 columnas:

$$\begin{array}{cc} & \\ F_1 & \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ & 2\times 4 \end{array} \cdot \begin{array}{c} C_1 \\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 4\times 3 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 16 & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \\ 2\times 3 \end{array}$$

El elemento de la fila 1 y columna 1 de $\boldsymbol{A \cdot B}$ proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de $\boldsymbol{A}$ por la columna 1 de $\boldsymbol{B}$ y sumar, es decir:

$$F_1 \cdot C_1 = (-3 \quad 2 \quad 1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3)\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot 3 = 0 + 2 + 2 + 12 = 16$$

$$\begin{array}{cc} & \\ F_1 & \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ & 2\times 4 \end{array} \cdot \begin{array}{c} C_2 \\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 4\times 3 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 16 & 16 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \\ 2\times 3 \end{array}$$

$$F_1 \cdot C_2 = (-3 \quad 2 \quad 1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-3)\cdot(-4) + 2\cdot(-2) + 1\cdot 0 + 4\cdot 2 = 12 - 4 + 0 + 8 = 16$$

$$\begin{array}{cc} & \\ F_1 & \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ & 2\times 4 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 4\times 3 \end{array} \begin{array}{c} C_3 \\ \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \underline{16} & \underline{16} & \underline{5} \\ \underline{} & \underline{} & \underline{} \end{pmatrix} \\ 2\times 3 \end{array}$$

$$F_1 \cdot C_3 = (-3 \quad 2 \quad 1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-3)\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot 1 = -3 + 2 + 2 + 4 = 5$$

Así sucesivamente se obtienen los demás elementos de la matriz producto:

$$\begin{array}{cc} & \\ F_2 & \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ & 2\times 4 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 4\times 3 \end{array} \begin{array}{c} C_3 \\ \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \underline{16} & \underline{16} & \underline{5} \\ \underline{5} & \underline{-22} & \underline{11} \end{pmatrix} \\ 2\times 3 \end{array}$$

Así la matriz producto es: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 5 \\ 5 & -22 & 11 \end{pmatrix}$

Observa que el producto $B{\cdot}A$ no se puede hacer:

$$\underset{4\times 3}{B} \cdot \underset{2\times 4}{A}$$

$$\neq$$

EJEMPLO

Realiza:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+0\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Propiedades del producto de matrices

Nota: Sólo tiene sentido hablar de propiedades del producto de matrices en el caso de matrices cuadradas.

- ***Propiedad asociativa*** ***A·(B·C) = (A·B)·C***
- ***Propiedad conmutativa*** ***El producto de matrices en general NO es conmutativo en general.***
  - ***AB≠BA***

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 0 + 4\cdot 1 & 3\cdot 0 + 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 0\cdot 3 & 0\cdot 2 + 0\cdot 4 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 3 & 1\cdot 2 + 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

En algunos casos particulares, puede darse el caso de que dos matrices sí verifiquen la propiedad conmutativa, en esos caso se dice que esas dos matrices ***son permutables.***

- ***Propiedad distributiva respecto de la suma de matrices:*** ***A·(B + C) = A·B + A·C***
- ***Propiedad distributiva respecto de la suma de matrices:*** ***(B + C)·A = B·A + C·A***
- ***Si A es una matriz cuadrada de orden n se tiene*** $A\cdot I_n = I_n\cdot A = A$.

MATRICES Y DETERMINANTES

Consecuencias de las Propiedades

Si $A \cdot B = 0$ no implica que $A = 0$ ó $B = 0$

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Si $A \cdot B = A \cdot C$ no implica que $B = C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

En general $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$, ya que $A \cdot B \neq B \cdot A$

En general $(A+B) \cdot (A-B) \neq A^2 - B^2$, ya que $A \cdot B \neq B \cdot A$

- ***Realizar el ejercicio resuelto 1 pag 41***

MATRICES Y DETERMINANTES

Potenciación de matrices

Si A es una matriz cuadrada, **las potencias de A**

$$A^0 = I$$

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A.A$$

$$A^3 = A.A^2 = A.A.A$$

$$A^n = A \cdot A \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot A (n veces)$$

Método inductivo

Algunas veces nos piden calcular potencias de una matriz de exponente muy elevado. En estos casos, podemos encontrar una formula de inducción, como veremos en el siguiente ejemplo

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \underbrace{A \ldots A}_{n\text{-veces}} = A \cdot A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Matrices cíclicas. Matrices relacionadas con la matriz unidad

Una matriz A es cíclica es decir, conforme se va elevando el exponente encontramos que para un cierto exponente el resultado es la matriz identidad I.
Procedimiento:
a)Calculemos las potencias sucesivas de A hasta obtener la matriz Identidad I
b) El periodo es el exponente con el que se obtiene la matriz identidad.
c) Se hace la división entera del exponente de la potencia que se quiere calcular entre el periodo y el resto que se obtiene es la potencia equivalente.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{257}

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Período $n = 3$

c) $\begin{array}{r|l} 257 & 3 \\ \hline 17 & 85 \\ 2 & \end{array}$

d) $A^{257} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Sólo hay tres posibles resultados : A, A^2, A^3 (el resto se repiten ciclicamente).

$(A)^{257} = A^2 \cdot A^{255} = A^2 \cdot (A^3)^{85} = A^2 \cdot (I^3)^{255} = A^2$

MATRICES Y DETERMINANTES

Determinantes

Sea A una matriz **cuadrada de orden *n*** *se define su determinante ASOCIADO como* **el número real**, que denotaremos por *det*(A) o *det A* o |A|.
Por tanto es un número asociado mediante una serie de cálculos el cual está íntimamente ligado a una serie de propiedades de la matriz que iremos analizando poco a poco.
El uso de determinantes nos permitirá:

- Calcular la inversa de una matriz
- Expresar la solución de un sistema de ecuaciones y
- Determinar el rango de una matriz.

Cálculo de determinantes orden 1,2 y 3

Orden1 $|A|=|a_{11}| = a_{11}$ Si $A = (2)$ $|A| = |2| = 2$

Orden 2 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ **=(a11) (a22) - (a21) (a12)**

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3·1 - 2·2 = 3 – 4 = -1$

- ***<u>Realizar el ejercicio resuelto 1, 2 y 3 de la pag 64</u>***
- ***<u>Realizar los ejercicios propuestos 1 y 2 pag 64</u>***

MATRICES Y DETERMINANTES

Determinante Orden 3 Regla de Sarrus

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Su determinante viene dado por la expresión:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}\,a_{23}a_{32}$$

$|A|=(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33})+ \quad (a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13})+ \quad (a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31})$

$- (a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}) \quad -(a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}) \quad -(a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32})$

MATRICES Y DETERMINANTES

Determinante Orden 3 Regla de Sarrus

Observación: Otra forma de resolver el determinante por la **Regla De Sarrus** es, de **matrices 3x3 SOLAMENTE**: escribe las dos primeras columnas después de la tercera columna

EJEMPLO

$$\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right) \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Suma de productos a lo largo de las flechas rojas menos suma de productos a lo largo de las flechas azules

$$\left(\begin{matrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{matrix}\right) \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$0 \quad -8 \quad 8 \quad 0 \quad 32 \quad 3$

Suma de términos rojos $= 0 + 32 + 3 = 35$

Suma de términos azules $= 0 - 8 + 8 = 0$

Determinante de la matriz A = $|A| = 35 - 0 = 35$

MATRICES Y DETERMINANTES

Determinante Orden 3 Regla de Sarrus

Observación: Otra forma de resolver el determinante por la **Regla De Sarrus** es, de **matrices 3x3 SOLAMENTE**: escribe las dos primeras filas después de la tercera fila

Suma de productos a lo largo de las flechas rojas menos suma de productos a lo largo de las flechas azules

$$\Delta_x = \begin{array}{ccc} \left| \begin{array}{ccc} 2{,}80 & 20 & 40 \\ 2{,}75 & 25 & 50 \\ 2{,}56 & 40 & 8 \end{array} \right| \\ \begin{array}{ccc} 2{,}80 & 20 & 40 \\ 2{,}75 & 25 & 50 \end{array} \end{array}$$

$$= (2{,}80 \cdot 25 \cdot 8 + 2{,}75 \cdot 40 \cdot 40 + 2{,}56 \cdot 20 \cdot 50)$$

$$-(2{,}56 \cdot 25 \cdot 40 + 2{,}80 \cdot 40 \cdot 50 + 2{,}75 \cdot 20 \cdot 8) =$$

$$= (560 + 4400 + 2560) - (2560 + 5600 + 440) =$$

$$= 7520 - 8600 = -1080$$

- ***Realizar el ejercicio resuelto 1 de la pag 65***
- ***Realizar los ejercicios propuestos 1 y 2 pag 65***

MATRICES Y DETERMINANTES

Menor complementario

Dada una **matriz cuadrada** A de orden n, definimos el ***menor complementario*** de un elemento de A, *aij* , como el determinante de la matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j en la que se encuentra dicho elemento *aij*. Se representa por *Mij.* .

Para hallar el menor M_{11}:

a) suprimimos la primera fila y la primera columna así:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

b) Tomamos los números que no quedan tapados (los números rojos)

$$= \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

c) Tercero hallamos el determinante

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (4)(7) - (5)(6) = 28 - 30 = -2$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Hallar los menores M12, M22 y M32

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = (2)(7) - (1)(6) = 14 - 6 = 8$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = (1)(7) - (3)(1) = 7 - 3 = 4$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (1)(6) - (2)(3) = 6 - 6 = 0$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Adjunto

Dada una matriz cuadrada A de orden n, definimos el *adjunto de un elemento* a_{ij} de A, y lo escribimos como A_{ij} como el menor complementario del elemento a_{ij} afectado del signo + o -, según que la suma i + j sea par o impar.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot Mij$$

La matriz formada por todos los adjuntos A_{ij} se le llama matriz adjunta de A.

¿Como saber el signo?

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$$

Orden 2

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Orden 3

Donde el + significa que el adjunto coincide con el menor complementario y el – indica que tienen signo contrario.

MATRICES Y DETERMINANTES

Calcular la matriz adjunta

Matriz adjunta

Por ejemplo en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = 0 \qquad A_{23} = -9$$

$$A_{31} = -4 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

siendo la matriz adjunta $\mathrm{Adj}(A)$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -20 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -9 \\ -4 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Desarrollo de un determinantes por adjuntos

El valor de un determinante es igual a la suma de productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes:

EJEMPLO

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -36$$

- ***Realizar el ejercicio resuelto 1, pag 71***

MATRICES Y DETERMINANTES

Propiedades de los determinantes

I. Si se multiplican los elementos de una fila o columna de una matriz por un número el determinante de la matriz se multiplica por ese número.

$$\det(F_1,F_2,\ldots,kF_i,\ldots,F_n)= k\cdot\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n)$$

$$\det(C_1,C_2,\ldots,kC_i,\ldots,C_n)= k\cdot\det(C_1,C_2,\ldots,C_i,\ldots,C_n)$$

$$\begin{vmatrix} ka & b & c \\ kd & e & f \\ kg & h & i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ 20 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5\cdot 2 & 2 & 0 \\ 5\cdot 1 & 1 & 3 \\ 5\cdot 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

II. Si se multiplica una matriz cuadrada de orden n por un número el nuevo determinante es igual al anterior multiplicado por la potencia n-ésima del número.(n es el orden de la matriz) **$|kA| = k^n|A|$ donde n es el orden de A**

$$\det(k\cdot A)=k^n\cdot\det(A)$$

Ejemplo:

Se cumple que: $\left|2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right| = 2^3\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right|$

III. Si se intercambian entre sí dos filas o dos columnas de una matriz, su determinante cambia de signos.

$\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ \ldots,\ F_j,\ldots,F_n)= -\det(F_1,F_2,\ldots,F_j,\ldots,\ F_i,\ldots,F_n)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$|B| = -|A|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$|B| = -|A|$$

IV. El determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su matriz traspuesta: **$|A|=|A^t|$.**

V. El determinante de una matriz con dos filas o columnas proporcionales es cero. **$|A|=0$.**

$\det(F_1,\ldots,\ F_i,\ldots,k\cdot F_i,\ldots,F_n)=0$

Ejemplo

$\det(C_1,\ldots,\ C_i,\ldots,k\cdot C_i,\ldots,C_n)=0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \end{vmatrix} = 0$$

VI. El determinante de una matriz con una fila o columnas que contiene solo ceros es cero: **$|A|=0$.**

$\det(F_1,\ F_2,\ldots,\ 0,\ \ldots,\ F_n)=0$

$\det(C_1,\ C_2,\ldots,\ 0,\ \ldots,\ C_n)=0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = 0$$

VII. El determinante de la matriz inversa es $\det(A^{-1})=1/\det(A)$

VIII. El determinante DEL PRODUCTO de matrices es el producto de los determinantes $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$ de aquí se deduce $|A^k| = |A|^k$

IX. Si a una línea de una matriz se le suma(resta) otra línea multiplicada por un número, el determinante no cambia.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g + ka & h + kb & g + kc \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 - 2\cdot 1 & 1 - 2\cdot 0 & 9 - 2\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

X. Si en una matriz cuadrada A de orden n, una fila o columna es combinación lineal de las demás, su determinante es cero. **|A|=0.**

Ejemplo

C3 =2C1-3C2

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2\cdot 1 + (-3)\cdot 2 \\ 2 & 1 & 2\cdot 2 + (-3)\cdot 1 \\ -1 & 2 & 2\cdot(-1) + (-3)\cdot 2 \end{vmatrix} = 0$$

XI. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

Ejemplo:

El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $|A| = -1*2*2=4$

XII. El determinante de la matriz unidad es 1 : $|I_n|=1$

XIII. Si los elementos de una línea de una matriz se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de líneas iguales a las del determinante inicial.

$$\begin{vmatrix} a+a' & b & c \\ d+d' & e & f \\ g+g' & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b & c \\ d' & e & f \\ g' & h & i \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 1 & 3 \\ 3+4 & 0 & 2 \\ 2+1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Rango de una matriz

Definición:

1. El RANGO* se representa por *rg(A)*.** El **rango** de una matriz es el número de filas o columnas linealmente **independientes**. Utilizando esta definición se puede calcular usando ***el método de Gauss(No lo vemos).

2. También podemos decir que el rango es: El Rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo (menor complementario distinto de cero). Utilizando esta definición se puede **calcular el rango usando determinantes (método usado)**.

Consecuencia

Por tanto, el rango no puede ser mayor al número de filas o de columnas. Para una matriz de dimensión mxn no nula se cumple que:

$$1 \leq \mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$$

Rango de una matriz

Recomendaciones para el cálculo:

- **Si suprimimos las líneas dependientes(filas o columnas) el rango no varía, es decir:**
  - **Las líneas nulas.**
  - **Las repetidas.**
  - **Las que sean múltiplos o combinaciones sencillas de otras.**

EJEMPLO 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Puede observarse que ; c3=-c2 Podemos eliminar C3

Puede observar... que ; c4= C1+C2 Podemos eliminar C3

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego el rango de A sería similar al ...

EJEMPLO 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

En la matriz *A*, la fila segunda es el triple de la primera: . F2 =3F1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \cancel{3} & \cancel{-6} & \cancel{9} \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego el rango de A sería similar al de A’ $= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

EJEMPLO 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego el rango de A sería similar al de A’ $= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Rango de una matriz cuadrada

1º Si la matriz A es cuadrada de orden n se calcula det (A).Puede ocurrir:

- Si det (A) $\neq 0$ $rg(A) = n \rightarrow Las\ filas\ de\ A\ son\ Linealmente\ Independientes$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que |A|=-16 en consecuencia r(A) =3

- Si det (A)= 0 Hallo todos los menores de orden n-1. Si uno solo de los determinantes es distinto de cero $rg(A) = n$ -1-> *Las filas de A son linealmente dependientes.*

EJEMPLO

Calcula el rango de A

$$A= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 0 - (0 + 1 - 4) = -3 + 3 = 0$$

Como es nulo, podemos asegurar que el rango NO es 3.

Menores de orden 2 hay 9. Calculando alguno: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

resulta que es no nulo, luego el rango es $\mathrm{rg}(A) = 2$ (el tamaño de dicho menor complementario).

- Si todos los menores n-1son cero. Hallo todos los menores de orden n-2. Si uno solo de los determinantes es distinto de cero $rg(A) = n$ -2. y así sucesivamente

MATRICES Y DETERMINANTES

2º Si la matriz A no es cuadrada analizar en primer lugar los mayores determinante que se pueda extraer de la matriz. Y se opera igual que el caso anterior.

EJEMPLO

CALCULAR EL RANGO DE:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Como es una matriz 3x4 el máximo rango es 3. r(A)$\leq$ 3

Calculo los distintos menores de orden 3 (tiene 4):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Como todos son cero luego el rango es menor que 3. Hay 18 menores de orden 2

Y como existe un menor de orden 2 distinto de cero luego el rango(B)= 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Si me doy cuenta F3= F1+F2 puedo eliminarla y estudiar directamente el Rango de:

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Que como máximo el rango es dos.

MATRICES Y DETERMINANTES

EJEMPLO

Aplicando este criterio, calculemos el rango de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

A) Sólo hay un menor de orden 2, que es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Como es nulo, el rango de la matriz NO es 2. Menores de orden 1 hay 4, por ejemplo $|1| = 1$, que es no nulo, luego el rango de la matriz es $\mathrm{Rg}(A) = 1$ (el tamaño de dicho menor complementario).

B) Sólo hay un menor de orden 2, que es: $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$

Como no es nulo, el rango de la matriz es $\mathrm{Rg}(B) = 2$ (el tamaño de dicho menor complementario).

C) El menor más grande que podemos formar es de orden 2. Hay 3 de ellos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

Son todos nulos, luego el rango NO es 2. Menores de orden 1 hay 6, y por ejemplo $|6| = 6 \neq 0$, es no nulo, luego el rango es $\mathrm{Rg}(C) = 1$.

MATRICES Y DETERMINANTES

RANGO DE UNA MATRIZ CON PARÁMETROS

EJEMPLO

Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro a

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: **Si la matriz es cuadrada se resuelve la ecuación |A|=0. Las soluciones son los casos que hay que estudiar.** Analizamos en primer lugar el mayor determinante que se pueda extraer de la matriz y que contenga a a, por ejemplo,

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a = 0 \qquad \{a = 0\}, \{a = 1\}$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$: $r(M) = 3$

Si $a = 0$: $r(M) = 2 \quad pues \quad \exists \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

Si $a = 1$: $r(M) = 2 \quad pues \quad \exists \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

Si la matriz es rectangular se resuelve la ecuación |A'|=0. Donde A' es una submatriz cuadrada de A con el mayor tamaño posible. Las soluciones son los casos que hay que estudiar. Da igual la submatriz que se elija, aunque no salgan los mismos casos, si se llega a las mismas conclusiones.

EJEMPLO

Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 1 = 0 \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

- **Si $k = 1$** $\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & & -2 & 0 \\ -1 & & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 3$

- **Si $k = -1$** $\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & & -2 & 0 \\ -1 & & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$

$\rightarrow ran\,(A) = 2$

- **Si $k \neq -1$** $\rightarrow ran\,(A) = 3$

MATRICES Y DETERMINANTES

Operaciones con matrices

Trasposición de matrices

Dada una matriz de orden *m x n, A* = (*aij*), se llama matriz traspuesta de A, y se representa por

A^t = (*aji*) de orden *nxm* , a la matriz que se obtiene cambiando las filas por las columnas (o viceversa) en la matriz A.

Es decir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \iff A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la trasposición de matrices:

1ª.- Dada una matriz A, siempre existe su traspuesta y además es única.

2ª.- La traspuesta de la matriz traspuesta de A es A. ⇨ $(A^t)^t = A$.

3ª.- $(A + B)^t = A^t + B^t$

4ª - $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

5ª - $(AB)^t = B^t A^t$

6ª - $|A^t| = |A|$

MATRICES Y DETERMINANTES

Matrices inversibles

Si *A* es una matriz cuadrada, se dice que *B* es la **inversa** de *A* si

$$AA^{-1}=A^{-1}=I$$

siendo *I* la matriz unidad o identidad.

La matriz inversa de *A* se representa por $\boldsymbol{A^{-1}}$.

Proposición: Una matriz se dice ***regular***, es decir, tiene inversa si su determinante no es cero. En caso contrario la matriz es ***singular***:

$|A|\neq 0 \rightarrow$ regular $\exists\ A^{-1}$

$|A|=0 \rightarrow$ singular $\nexists\ A^{-1}$

Observación: Por lo tanto, para que una matriz pueda tener inversa es necesario que su determinante sea distinto de cero.

$$\det(A)\neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

Por tanto, si una matriz cuadrada de orden *n* , ***A***, tiene inversa, $\boldsymbol{A^{-1}}$, se cumple que:

$$A\cdot A^{-1}=I_n \qquad \text{y} \qquad A^{-1}\cdot A=I_n$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Cálculo de la inversa **Si tenemos una matriz tal que *det (A) ≠ 0*, se verifica:**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\mathrm{Adj}(A)]^t = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A^t)$$

EJEMPLO

Calcular, si es posible, la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En primer lugar

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (1 - 3 + 0) = 2 \neq 0$$

y por tanto A tiene inversa.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos Adj(A^t):

$$\mathrm{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y entonces, se obtiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

EJEMPLO

Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-4)(-2) = -5 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

b) Se calculan los adjuntos de los elementos de A^t: $A^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^t_{11} = 1$ $A^t_{12} = -(-2) = 2$

$A^t_{21} = -(-4) = 4$ $A^t_{22} = 3$

La matriz adjunta de la traspuesta es: $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

La inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- ***Realizar el ejercicio resuelto 1, 2 de la pag 78***
- ***Realizar el ejercicio propuesto 1 pag 78***

MATRICES Y DETERMINANTES

Matrices ortogonales

Un tipo especial de matrices invertibles, particularmente importante por sus aplicaciones, lo constituyen las matrices ortogonales. Se dice que una matriz cuadrada A es **ortogonal** si La inversa coincide con su traspuesta.

$$A^{-1} = A^{t}$$

Para cualquier número real α demostrar que A es ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \propto & -sen \propto \\ sen \propto & \cos \propto \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A.A^{t} = \begin{pmatrix} \cos \propto & -sen \propto \\ sen \propto & \cos \propto \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos \propto & sen \propto \\ -sen \propto & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

Propiedades de la inversión de matrices

1. ***La matriz inversa, si existe, es única***
2. $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. ***Respecto del producto por escalares:***

$(kA)^{-1} = (1/k) \cdot A^{-1}$

5. ***Respecto del producto de matrices***

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

6. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

MATRICES Y DETERMINANTES

Ecuaciones matriciales mediante inversas

Se llama ecuación matricial es aquella que tiene como incógnita una matriz.

- Usamos la siguiente propiedad:

$$A\cdot A^{-1}= A^{-1}\cdot A = I$$

- Ojo!!!Al no ser conmutativo el producto de matrices Si lo que queremos es multiplicar una ecuación por una matriz determinada debemos de hacerlo en ambos términos de la igualdad por el mismo lugar.
- Al no existir la división en matrices debemos multiplicar siempre por la inversa.

Resolver la siguiente ecuación matricial :$AX + BX = C$

$$(A + B)\, X = C$$
$$(A + B)^{-1} (A + B)\, X = (A + B)^{-1}\, C$$
$$I\, X = (A + B)^{-1}\, C$$
$$X = (A + B)^{-1}\, C$$

Resolver la siguiente ecuación matricial :$X\cdot A^{-1} +B =C$

$$X\cdot A^{-1} = C-B$$
$$X\cdot A^{-1} \cdot A= (C-B)\cdot A$$
$$X\cdot I = (C-B)\cdot A$$
$$X= (C-B)\cdot A$$

MATRICES Y DETERMINANTES

A veces es interesante sacar factor común:

XA -2X = A -> XA-X 2I=A -> X(A-2I)=A -> X=A(A-2I)$^{-1}$

Ejemplo

Resolver la ecuación matricial AX – B = X, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

AX – B = X;   AX – X = B;   (A – I)X = B;   X = (A – I)$^{-1}$ .B.

A – I = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ Hallamos la inversa de A $^{-I}$:

$$\left((A-I)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que resulta que $X = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 & -1 \\ 7/2 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicios resueltos 1 pág. 44, 9 y 10 pág. 54 Ejercicio 7 pág.81

MATRICES Y DETERMINANTES

Ecuaciones matriciales sin hallar las inversas

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

a) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X+A^t=I_2$.

<u>A veces no es posible despejar la matriz X(Ejemplo AX =XB) o no queremos hallar la inversa</u> .

- Despejamos AX = I_2-A^t
- Escribimos la matriz incógnita X con parámetros a,b,c,.. En todos sus elementos.

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

- Se efectúan todas las operaciones de cada uno de los miembros de la ecuación.

$$\begin{pmatrix}a-c & b-d\\ 2a-c & 2b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

- Mediante la igualdad de matrices pasamos a un sistema lineal

$$\left.\begin{array}{l} a-c=0\\ 2a-c=1\\ b-d=-2\\ 2b-d=2\end{array}\right\}\Rightarrow a=1\,;\, b=4\,;\, c=1\,;\, d=6$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 6\end{pmatrix}$$

Ejercicios resueltos 7 pag 53 a)

MATRICES Y DETERMINANTES

Sistemas de ecuaciones matriciales

Los sistemas de ecuaciones matriciales se resuelven de forma análoga a los sistemas de ecuaciones lineales por sustitución , igualación o reducción.
La X e Y son matrices.

Determina las matrices *X* e *Y* sabiendo que:

$$2X+Y=\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix} \text{ y } 3X+2Y=\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}$$

$$\text{Llamamos } A=\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}$$

Sustituyendo el sistema matricial queda $\begin{cases}2X+Y=A\\ 3X+2Y=B\end{cases}$

Resolviendo el sistema por reducción, obtenemos como expresiones para X e Y las siguientes:

$$X=2A-B \quad \text{e} \quad Y=-3A+2B$$

Sustituyendo Ay B, obtenemos:

$$X=2\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 14\\ -12 & -6 & -21\end{pmatrix}$$

$$Y=-3\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 14 & -21\\ 28 & 14 & 49\end{pmatrix}$$

Ejercicios resueltos 2 pag 45