

## MATRICES (Resumen)

- **Nomenclatura**

- $A = (a_{ij})_{m, n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  es una matriz de **dimensión  $m \times n$** . Es decir:  
 $m$  filas  
 $n$  columnas  
 El elemento  $a_{ij}$  está en la *fila  $i$*  y *columna  $j$* .

- La matriz es **cuadrada** cuando  $m = n$  (igual número de filas que de columnas).
- La matriz **traspuesta** de una matriz  $A$ , designada por  $A^t$ , es la que se obtiene al poner las filas de  $A$  como columnas en  $A^t$ . Por tanto, si  $\dim(A) = m \times n \Rightarrow \dim(A^t) = n \times m$ .
- Una matriz es **simétrica** cuando  $A = A^t$ . Todas las matrices simétricas son cuadradas.

- Una matriz cuadrada se dice **diagonal** si todos los elementos son cero, salvo los de la **diagonal principal**.
 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Una matriz cuadrada se dice **triangular superior** si todos los elementos bajo la diagonal principal son cero, como la adjunta a estas líneas. (Si son *sobre* la diagonal principal los ceros, es *triangular inferior*).
 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matriz **nula** es aquella cuyos términos son todos cero. Se designa por  $O_{m \times n}$ .
- Matriz **unidad** es una matriz diagonal cuyos términos son 0 todos, salvo los de la diagonal principal, que valen todos 1. Se designa por  $I_n$ . O bien por  $I$ , si la dimensión es conocida.

- **Suma de matrices**

- Se suman **término a término** y las matrices deben **tener la misma dimensión**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- **Propiedades:**

- Asociativa:  $A + (B + C) = (A + B) + C$  (cuando se suman tres o más matrices, dos de ellas que sean consecutivas se pueden sustituir por su resultado, sin cambiar la posición que ocupaban respecto de las demás).
- Conmutativa:  $A + B = B + A$  (se puede cambiar el orden).
- Existe elemento neutro:  $A + O = O + A$  (la matriz nula, sumada con cualquier otra, resulta ésa otra).
- Cada matriz tiene una opuesta:  $A + (-A) = O$  (cambiando los signos de cada uno de sus elementos se obtiene la opuesta: se designa por  $-A$ . Sumando la matriz  $A$  con su opuesta  $-A$  resulta la matriz nula).

- **Producto de una matriz por un número real o producto externo**

- Se multiplica el número real  $k$  por cada **término** de la matriz, resultando una matriz de la misma dimensión:

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- **Propiedades:**

- Asociativa:  $a(bA) = (ab)A$  (observar, por ejemplo, que el producto  $bA$  es *externo* y  $ab$  es el producto de números reales).
- Distributiva 1:  $(a + b)A = aA + bA$  (observar que  $a + b$  es suma de números reales, y  $aA + bA$  es suma de matrices).
- Distributiva 2:  $a(A + B) = aA + aB$ .
- Elemento unidad:  $1A = A$  ( $1 \in \mathbb{R}$ ).

Por tanto, el conjunto de matrices de dimensión  $m \times n$ , con las operaciones *suma de matrices* y *producto por un número real* es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . (Lo es porque cumple las 8 propiedades de las dos operaciones, puesto que ésta es la definición de espacio vectorial).

- **Producto de matrices**

- Para poder multiplicar la matriz  $A$  por la  $B$ , el número de columnas de  $A$  debe coincidir con el de filas de  $B$ . O sea, que  $\dim(A) = m \times n$  y  $\dim(B) = n \times p$ . La matriz resultante  $C = A \cdot B$  es tal que  $\dim(C) = m \times p$ .
- El elemento de la fila  $i$  y columna  $j$  de la matriz resultante  $C$  proviene de multiplicar cada elemento de la fila  $i$  de  $A$  por el correspondiente elemento de la fila  $j$  de  $B$  y sumar los resultados:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$m \times n$                        $n \times p$                        $m \times p$

- **Propiedades:**

- Asociativa:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Distributiva:  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  y  $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
- Elemento unidad:  $A \cdot I = A$  y  $I \cdot A = A$  ( $I =$  matriz unidad).
- No es conmutativo:  $A \cdot B \neq B \cdot A$ , en general. Hablaremos de multiplicar la matriz  $B$  por la matriz  $A$  por la izquierda o por la derecha.
- Traspuesta del producto:  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- Matriz inversa: Para *algunas* matrices *cuadradas* existe cierta matriz tal que multiplicada por la matriz original resulta la matriz unidad. Dicha matriz, que designamos por  $A^{-1}$ , es denominada *matriz inversa de A*:
 
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$
  - Las matrices cuadradas que tienen inversa se denominan **regulares**.
  - La inversa de una matriz regular es **única**.
  - **La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.**
- No existe la operación división de matrices: **No se puede dividir una matriz entre otra.**
- Por último,  $(A + B)^t = A^t + B^t$