

## Examen Tema 1. Matrices y Determinantes

### Instrucciones para el examen:

- Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
- **CALIFICACIÓN:** Cada ejercicio tiene una puntuación diferentes y en el enunciado se especifica la valoración de cada apartado. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
- **TIEMPO:** 50 minutos.
- Aunque utilices calculadora, muestra claramente los pasos y tu conocimiento de los conceptos y las fórmulas matemáticas que se están aplicando.
- Evita el uso de decimales. Expresa los resultados en forma de fracciones y radicales. En caso de tener que usarlos, redondea a la centésima.
- Sé claro/a, limpio/a, ordenado/a y cuida la ortografía. No se corregirá lo que no se entienda claramente.

1. **(4 puntos)** Se considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$  dependiente del parámetro real  $a$ :

- (1 puntos) Determinése los valores de  $a$  para los que la matriz  $A$  es invertible.
- (1 punto) Para  $a = 1$ , despéjese y determinése la matriz de  $X$  de la ecuación matricial  $A \cdot X = A + 2Id$ , donde  $Id$  representa la matriz identidad de orden 3.
- (2 puntos) Calcula la matriz  $B = A + I$  y averigua el valor de  $B^{11}$ .

---

2. **(3 puntos)** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , se pide:

- (1'5 puntos). Hallar las condiciones que deben cumplir  $a$ ,  $b$  y  $c$ , para que se verifique que  $A \cdot B = B \cdot A$ .
- (1'5 puntos). Para  $a = b = c = 1$ , calcular las cuatro primeras potencias de  $B$ , y conjeturar una fórmula para  $B^n$ .

---

3. **(2 puntos)** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , hallar todas las matrices que conmuten o permuten con ella.

## RESOLUCIÓN

1. (4 puntos) Se considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$  dependiente del parámetro real  $a$ :

- (1 punto) Determinése los valores de  $a$  para los que la matriz  $A$  es invertible.
- (1 punto) Para  $a = 1$ , despéjese y determinése la matriz de  $X$  de la ecuación matricial  $A \cdot X = A + 2Id$ , donde  $Id$  representa la matriz identidad de orden 3.
- (2 puntos) Para  $a = 1$  calcula la matriz  $B = A + I$  y averigua el valor de  $B^{11}$ .

SOLUCIÓN:

- a) Ver que  $A$  sea invertible equivale a ver qué valores de  $a$  hacen que el determinante no se anule.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = a^3 + a^3 = 2a^3; |A| = 2a^3 = 0 \leftrightarrow a = 0$$

Por tanto, para cualquier  $a \neq 0$  la matriz  $A$  es invertible.

b)  $AX = A + 2Id \rightarrow X = A^{-1}(A + 2I)$

Calculamos la inversa de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Primero calculamos su determinante  $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$

Después la matriz adjunta:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Por tanto,  $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Y por último trasponemos la matriz adjunta y dividimos por el determinante:

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para terminar de resolver la ecuación, calculamos la otra matriz involucrada y las multiplicamos:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(A + 2I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

También podíamos haber desarrollado el paréntesis y hacer operaciones más sencillas:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}(A + 2I) = A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot 2I = I + 2A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¡En ambos casos observamos que la  $X=A$ !

$$c) B = A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calculamos sus primeras potencias:

$$\begin{aligned} B^2 &= B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ B^3 &= B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \\ B^4 &= B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observamos que podemos conjeturar una fórmula para  $n$ :  $B^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$

Así que para  $n = 11$  la matriz quedará  $B^{11} = \begin{pmatrix} 3^{10} & 3^{10} & 3^{10} \\ 3^{10} & 3^{10} & 3^{10} \\ 3^{10} & 3^{10} & 3^{10} \end{pmatrix}$

---

2. (3 puntos) Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , se pide:

a) (1'5 puntos). Hallar las condiciones que deben cumplir  $a$ ,  $b$  y  $c$ , para que se verifique que  $A \cdot B = B \cdot A$ .

b) (1'5 puntos). Para  $a = b = c = 1$ , calcular las cuatro primeras potencias de  $B$ , y conjeturar una fórmula para  $B^n$

a)  $A \cdot B = B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2c & 2c+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5a+2c = 5a+2b & \rightarrow 2c = 2b; & c = b \\ 5b+2c = 2a+5b & \rightarrow 2c = 2a; & c = a \\ 2a+5c = 5c+2c & \rightarrow 2a = 2c; & a = c \\ 2b+5c = 2c+5c & \rightarrow 2b = 2c; & b = c \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} a=b=c \\ \text{condición} \\ \text{pedida} \end{array} \right.$$

b) Si  $a=b=c=1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2^0$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2^1$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2^2$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2^3$$

$$\begin{aligned} B^1 &= 1 = 2^0 \\ B^2 &= 2 = 2^1 \\ B^3 &= 4 = 2^2 \\ B^4 &= 8 = 2^3 \\ &\vdots \\ B^n &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (2 puntos) Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , hallar todas las matrices que conmuten o permuten con ella.

SOLUCIÓN:

Hay que resolver la ecuación  $AX = XA$  donde  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$\text{Por tanto } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+2z & y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x+2y \\ z+t & z+2t \end{pmatrix}$$

Al igualar y resolver los sistemas correspondientes:

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z = x+y \rightarrow z = y \\ x+2z = z+t \rightarrow t = x+z = x+y \\ y+t = x+2y \rightarrow t = x+y \\ y+2t = z+2t \rightarrow y = z \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son todas las matrices de la forma:

$$\text{Soluciones} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x+y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$