

1. Deriva las siguientes funciones dejando su expresión en forma razonablemente simplificada:

a) $f(x) = e^{\frac{x}{3}} + 3\cos^2\left(\frac{x}{6}\right)$

b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Aplica la definición para hallar la función derivada de $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

3. Sea la función: $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$

a) Estudia el dominio y la continuidad de $f(x)$ indicando los tipos de discontinuidad que posea.

b) Halla, explicando brevemente el procedimiento, los límites de $f(x)$ en los infinitos.

4. La siguiente función $f(x)$ representa las ganancias o pérdidas en millones de euros de una empresa

fundada hace dos años: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ \frac{3x}{2x+4} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ donde x indica el número de años

transcurridos, considerando $x = 0$ como el momento actual.

a) Estudia el dominio de la función $f(x)$

b) Cuando pasen '*muchos años*', ¿en qué situación de ganancias o pérdidas se espera que esté la empresa?

5. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3x + a & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \\ -x^2 + 13x + b & \text{si } 5 < x \end{cases}$

a) Determina los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todos los valores de x

b) Demuestra que la función no es derivable en $x = 2$. ¿Cómo interpretas esta circunstancia?

① a) $f'(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} + 3 \cdot 2 \cos\left(\frac{x}{6}\right) \cdot \left[-\sin\left(\frac{x}{6}\right)\right] \cdot \frac{1}{6} = \left[\frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} - \sin\left(\frac{x}{6}\right) \cos\left(\frac{x}{6}\right) \right]$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{\ln(1/x)}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x} \ln(1/x)}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = \left[\frac{\sqrt{x} \cdot (\ln(1/x) - 2)}{2x} \right]$

② $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)^2 - 2(x+h) + 1] - [3x^2 - 2x + 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2x - 2h + 1 - 3x^2 + 2x - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h - 2) = \boxed{6x - 2}$

③ $x^2 + x - 6 = 0$
 $x = -2$
 $x = -3$

a) $\text{dom } f = \boxed{\mathbb{R} - \{-3, 2\}}$ por ser una función racional.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$ por ser racional.

$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{-27 - 8}{0} = \frac{-35}{0} = \infty$ Discontin. Asintótica en $x = -3$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+3)} = \left[\frac{12}{5} \right]$ Discontinuidad Evitable en $x = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6} = \boxed{+\infty}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6} = \boxed{-\infty}$

④ a) $\frac{1}{2}x^2 - 2$ está definida en $[-2, -1)$
 $\frac{3x}{2x+4}$ " " " $(-1, +\infty)$

En $x = -2$ se anula el denominador, pero no pertenece al 2º trozo de la función.

$\text{dom } f = \boxed{[-2, +\infty)}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x+4} = \frac{3}{2} = \boxed{1.5}$

Cuando pesen 'muchos autos' se espera que la empresa gane 1.5 millones de euros

⑤ Todas las expresiones son polinómicas, por lo que la función es continua en $(-2, 2) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$

En $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 12$
 $f(2) = 6 + a$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6 + a$

$6 + a = 12 \rightarrow \boxed{a = 6}$ Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= 15+a \\ f(5) &= 15+a \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= -25+65+b \end{aligned}$$

$$15+a = 40+b ; \boxed{b = a - 25} \quad \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x=5$$

$$a=6 \Rightarrow \boxed{b = -19}$$

Para que sea continua en \mathbb{R}

$$\text{deben ser: } \boxed{a=6} \quad \boxed{b=-19}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x < 5 \\ -7x+13 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(2^-) &= 12 \\ f'(2^+) &= 3 \end{aligned}$$

Al ser la función continua en $x=2$, y tener distintos valores a izquierda y derecha de $x=2$, se trata de un punto anguloso:

