NOMBRE ____

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

   a) $\dfrac{(-12)^{25}(-3)^{4}}{(-4)^{19}(-9)^{30}}$ *(2 puntos)*

   b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a\sqrt{a^3}}$

   c) $\sqrt[4]{a\ \sqrt[3]{a}}$

   d) $\dfrac{3}{3-2\sqrt{2}}$

2) ¿Cuánto suman los 1000 primeros números pares (2 + 4 + 6 + ...)? *(1 punto)*

3) ¿Cuánto suman las 30 primeras potencias de 2 (es decir: $2^1 + 2^2 + ... + 2^{30}$)? Para este ejercicio, no se puede usar la calculadora, a menos que se encuentre una fórmula que simplifique el proceso. *(1 punto)*

4) Realizar: *(2 puntos)*

   a) Expresar $\log_2 x$ en función de $\ln x$.

   b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular $\log_3 243$.

   c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:

   $$A = \frac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}}$$

   d) Quitar logaritmos en: $\log A = 3\log x - \log y + \dfrac{2}{3}\log z + 1$

5) a) Para $P(x) = x^4 + mx^3 + 1$, hallar el valor de m que hace que tenga una raíz en $x = -1$. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido.

   b) Indicar, como consecuencia de lo anterior, aplicando el Teorema del Resto, un polinomio $Q(x)$ de grado 1 entre el que sea divisible $P(x)$.

   c) Efectuar dicha división, e indicar dividendo, divisor, cociente y resto.

   d) Por último, realizar la prueba correspondiente a la división efectuada. *(2 puntos)*

6) Factorizar $P(x) = 8x^3 - 18x^2 + 7x + 3$ *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

a) $\dfrac{(-12)^{25}(-3)^4}{(-4)^{19}(-9)^{30}}$ *(2 puntos)*

Para todos estos ejercicios, simplemente aplicamos propiedades de potencias y de raíces, recogidas en las *fórmulas fundamentales* publicadas en nuestra web, y las *operaciones con radicales*, que también están en la web.

$$\frac{(-12)^{25}(-3)^4}{(-4)^{19}(-9)^{30}} = \frac{-12^{25}\,3^4}{-4^{19}\,9^{30}} = \frac{12^{25}\,3^4}{4^{19}\,9^{30}} = \frac{(3{\cdot}2^2)^{25}\,3^4}{(2^2)^{19}\,(3^2)^{30}} = \frac{3^{25}(2^2)^{25}\,3^4}{2^{38}\,3^{60}} =$$

$$= \frac{2^{50}}{2^{38}\,3^{60-25-4}} = \boxed{\frac{2^{12}}{3^{31}}}$$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a\sqrt{a^3}}$

$$\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^6a^2}}{a\sqrt{a^2a}} = \frac{a^2\sqrt[3]{a^2}}{aa\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}}\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^4}\,\sqrt[6]{a^3}}{a} = \frac{\sqrt[6]{a^7}}{a} =$$

$$= \frac{a\,\sqrt[6]{a}}{a} = \boxed{\sqrt[6]{a}}$$

c) $\sqrt[4]{a\,\sqrt[3]{a}}$

$$\sqrt[4]{a\,\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3a}} = \sqrt[12]{a^4} = \boxed{\sqrt[3]{a}}$$

d) $\dfrac{3}{3-2\sqrt{2}}$

$$\frac{3}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3}{3-2\sqrt{2}}\,\frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3(3+2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{9+6\sqrt{2}}{9-2^2(\sqrt{2})^2} = \frac{9+6\sqrt{2}}{9-4{\cdot}2} =$$

$$= \frac{9+6\sqrt{2}}{9-8} = \boxed{9+6\sqrt{2}}$$

En este problema hay que advertir de varias circunstancias. En primer lugar, el método estándar para conseguir racionalizar un denominador en el que aparecen dos sumandos con raíces cuadradas en ellos consiste en multiplicar numerador y denominador por el conjugado de dicho denominador.

En segundo lugar, en el resultado final, similar a algunos intermedios, no podemos efectuar 9 + 6, porque el segundo sumando no es 6, sino $6\sqrt{2}$.

En tercer lugar, no podríamos simplificar los 3 del enunciado, y otros similares de los distintos pasos, porque *en una división no se pueden simplificar sumandos ni parte de sumandos, sino sólo factores*.

2) ¿Cuánto suman los 1000 primeros números pares (2 + 4 + 6 + ...)? *(1 punto)*

Tenemos que efectuar 2 + 4 + 6 + 8 + ... Se trata de la suma de 1000 términos es progresión aritmética, donde el primer término es $a_1 = 2$ y la diferencia, $d = 2$. Así, el último término es:

$$a_{1000} = a_1 + (1000-1)d = 2 + 999{\cdot}2 = 2000$$

La suma solicitada es, entonces:

$$s_{1000} = \frac{a_1 + a_{1000}}{2}1000 = \frac{2+2000}{2}1000 = \frac{2002}{2}1000 = 1001\cdot1000 = \boxed{1.001.000}$$

3) ¿Cuánto suman las 30 primeras potencias de 2 (es decir: 21 + 22 + ... + 230)? Para este ejercicio, no se puede usar la calculadora, a menos que se encuentre una fórmula que simplifique el proceso. *(1 punto)*

Aquí nos encontramos frente a una suma de 30 términos en progresión geométrica, con $a_1 = 2$, $r = 2$. Por tanto:

$$s_{30} = \frac{a_1(r^{30}-1)}{r-1} = \frac{2(2^{30}-1)}{2-1} = \boxed{2.147.483.646}$$

4) Realizar: *(2 puntos)*

a) Expresar $\log_2 x$ en función de $\ln x$.

Simplemente, aplicamos la fórmula de cambio de base en logaritmos:

$$\boxed{\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}}$$

b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular $\log_3 243$.

$$\log_3 243 = x \iff 3^x = 243 \iff 3^x = 3^5 \iff \boxed{x = 5}$$

c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:

$$A = \frac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}}$$

$$A = \frac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}} \Rightarrow \log A = \log \frac{10x^5\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}} = \log 10x^5\sqrt{y} - \log \sqrt[3]{z^2} =$$

$$= \log 10 + \log x^5 + \log \sqrt{y} - \frac{1}{3}\log z^2 = \boxed{1 + 5\log x + \frac{1}{2}\log y - \frac{2}{3}\log z}$$

d) Quitar logaritmos en: $\log A = 3\log x - \log y + \frac{2}{3}\log z + 1$

$$\log A = \log x^3 + \frac{1}{3}2\log z + \log 10 - \log y = \log 10 + \log x^3 + \frac{1}{3}\log z^2 - \log y =$$

$$= \log 10x^3 + \log \sqrt[3]{z^2} - \log y = \log \frac{10x^3\sqrt[3]{z^2}}{y} \Rightarrow \boxed{A = \frac{10x^3\sqrt[3]{z^2}}{y}}$$

5) a) Para $P(x) = x^4 + mx^3 + 1$, hallar el valor de m que hace que tenga una raíz en $x = -1$. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido. *(2 puntos)*

Tener una raíz en $x = -1$ significa, por definición, que $P(x) = 0$ en $x = -1$:

$$P(-1) = (-1)^4 + m(-1)^3 + 1 = 1 - m + 1 = -m + 2 = 0 \iff \boxed{m = 2}$$

Consecuentemente, $P(x) = x^4 + 2x^3 + 1$

b) Indicar, como consecuencia de lo anterior, aplicando el Teorema del Resto, un polinomio $Q(x)$ de grado 1 entre el que sea divisible $P(x)$.

Por el Teorema del Resto, si $P(-1) = 0$, entonces $P(x)$ es divisible entre $x - (-1) = x + 1$. Por tanto, $\boxed{Q(x) = x + 1}$.

c) Efectuar dicha división, e indicar dividendo, divisor, cociente y resto.

Efectuamos la división por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Dividendo:	$P(x) = x^4 + 2x^3 + 1$
divisor:	$Q(x) = x + 1$
Cociente:	$C(x) = x^3 + x^2 - x + 1$
Resto:	$R = 0$

d) Por último, realizar la prueba correspondiente a la división efectuada.

$$Q(x)\cdot C(x) + R = (x + 1)(x^3 + x^2 - x + 1) + 0 = x^4 + x^3 - x^2 + x + x^3 + x^2 - x + 1 =$$
$$= \boxed{x^4 + 2x^3 + 1}$$

6) Factorizar $P(x) = 8x^3 - 18x^2 + 7x + 3$ *(2 puntos)*

Comenzamos probando divisores positivos y negativos del término independiente 3:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 8 & -18 & 7 & 3 \\ 1 & & 8 & -10 & -3 \\ \hline & 8 & -10 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

No encontramos fácilmente un divisor exacto, por lo que probamos a encontrar las raíces del polinomio $8x^2 - 10x - 3$ igualándolo a 0 y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$$8x^2 - 10x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100+96}}{16} = \frac{10 \pm 14}{16} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{10-14}{16} = -\dfrac{4}{16} = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{10+14}{16} = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

Conocemos las dos raíces de este polinomio de segundo grado. Por el Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios: $8x^2 - 10x - 3 = 8(x + 1/4)(x - 3/2)$. La factorización del polinomio de partida es, pues:

$$\boxed{8x^3 - 18x^2 + 7x + 3 = 8(x - 1)(x + 1/4)(x - 3/2)}$$