INECUACIONES

1. Desigualdades

Una *desigualdad* es una expresión en la que interviene uno de los signos: $<$, $\leq$, $>$, $\geq$. Por ejemplo, $3 + 2 \leq 10$, que es una desigualdad *cierta*. $3+2 > 5$ es una desigualdad *falsa*.

2. Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Las **inecuaciones** son *desigualdades* en las que interviene una letra representando a un número desconocido, y a la que denominamos **incógnita**. *Resolver la inecuación* consiste en averiguar qué valor, o valores, son posibles para la incógnita, de manera que la inecuación resulte *cierta*. Las inecuaciones, si tienen solución, suelen tener un número infinito de soluciones, que representaremos en forma de intervalo o uniones de intervalos.

Por ejemplo $x + 2 \leq 10$ tiene infinitas soluciones. Es solución, por ejemplo, $x = 4$, puesto que al sustituir en la inecuación resulta: $4 + 2 \leq 10$, que es cierto. También es solución $x = \pi$, porque $\pi + 2 \leq 10$ $(\pi + 2 \approx 3.14 + 2 = 5.14)$. No es solución, en cambio, 8.1, ya que $8.1 + 2$ no es menor ni igual que 10.

Resolución

Para resolver una inecuación de primer grado con una incógnita, *se despeja* x *igual que en las ecuaciones*, pero hay que tener en cuenta dos importantes **reglas**:

1) Si *multiplicamos o dividimos* los dos miembros de la desigualdad por un mismo número, y éste es *negativo*, la desigualdad *cambia de sentido*.
   Por ejemplo, $5 < 7 \;\Rightarrow\;$ Multiplicando ambos miembros por -1: $-5 > -7$.
2) Si pasamos un *factor negativo* dividiendo al otro miembro de la desigualdad, o un *divisor negativo* multiplicando al otro miembro, ésta cambia de sentido.
   Por ejemplo $\dfrac{x}{-3} \geq 2 \;\Rightarrow\; x \leq -6$.

Ejemplos

1) Resolver: $\dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{x-8}{4} > \dfrac{x+14}{2} - 2$ (Selectividad para mayores de 25 años, 2010)

   Procedemos como en las ecuaciones, unificando denominadores y despejando. Mientras no tengamos que aplicar las reglas 1 ó 2 anteriores, todo es igual que en las ecuaciones:

$$\frac{4(5x-2)}{12} - \frac{3(x-8)}{12} > \frac{6(x+14)}{12} - \frac{24}{12} \;\Rightarrow\; \frac{20x-8}{12} - \frac{3x-24}{12} > \frac{6x+84}{12} - \frac{24}{12} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{20x-8-(3x-24)}{12} > \frac{6x+84-24}{12} \;\Rightarrow$$

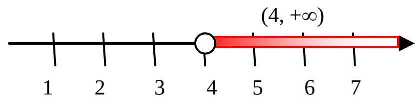
   Pasamos un denominador multiplicando al miembro contrario, y lo simplificamos con el denominador de dicho miembro. Como el número que pasamos multiplicando es positivo, no hay que aplicar la regla 2 anterior. Observar, también, el paréntesis que nos hemos visto obligados a colocar en el numerador del primer miembro.

$$20x-8-3x+24 > \frac{6x+60}{12} \cdot 12 \;\Rightarrow\; 17x + 16 > 6x + 60 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 17x - 6x > 60 - 16 \;\Rightarrow\; 11x > 44 \;\Rightarrow$$

   Pasamos dividiendo 11 al otro miembro. Todo sigue igual, ya que es positivo, por lo que tampoco hay que aplicar la regla:

$$\Rightarrow \quad x > \frac{44}{11} \quad \Rightarrow \quad x > 4$$



En el gráfico, observamos que $\boxed{\text{la solución es que } x \in (4, +\infty)}$. Esto es, tiene infinitas soluciones. Por ejemplo, 4.1, 7, 2000, etc.

2) Resolver la inecuación: $\frac{x}{2} - \frac{3x-6}{4} \geq \frac{x-3}{2} + \frac{2x+6}{5}$ (Selectividad para mayores de 25 años, 2008)

Procedemos de forma similar al problema anterior:

$$\frac{x}{2} - \frac{3x-6}{4} \geq \frac{x-3}{2} + \frac{2x+6}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{10x}{20} - \frac{5(3x-6)}{20} \geq \frac{10(x-3)}{20} + \frac{4(2x+6)}{20} \quad \Rightarrow$$

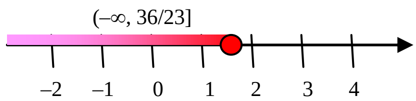
$$\Rightarrow \quad \frac{10x - 5(3x-6)}{20} \geq \frac{10(x-3) + 4(2x+6)}{20} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 10x - 15x + 30 \geq \frac{10x - 30 + 8x + 24}{20} \cdot 20 \quad \Rightarrow \quad -5x + 30 \geq 18x - 6 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -5x - 18x \geq -6 - 30 \quad \Rightarrow \quad -23x \geq -36 \quad \Rightarrow$$

Ahora tenemos que cambiar de sentido la desigualdad, pues pasamos *dividiendo* un número *negativo* al otro miembro:

$$\Rightarrow \quad x \leq \frac{-36}{-23} \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{36}{23}$$



Y, según vemos en el gráfico, las infinitas soluciones están en el intervalo $\boxed{(-\infty, 36/23]}$.

3. Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita

No hay reglas nuevas. Sólo tenemos en cuenta que las dos inecuaciones deben ser *ciertas a la vez*. De modo que las resolvemos por separado y nos quedamos con la zona que contiene soluciones de las dos inecuaciones al mismo tiempo.

Ejemplo

3) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 8x - 4 < 15x + 8 \\ \frac{2x+6}{5} \leq \frac{6-3x}{4} \end{cases}$ y represente gráficamente las soluciones sobre la recta real. (Selectividad para mayores de 25 años, 2011).

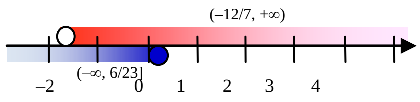
Como hemos dicho, resolvemos cada inecuación por separado.

- $8x - 4 < 15x + 8 \quad \Rightarrow \quad -4 - 8 < 15x - 8x \quad \Rightarrow \quad -12 < 7x \quad \Rightarrow \quad -\frac{12}{7} < x \quad \Rightarrow$ $x > -\frac{12}{7}$

  Hemos pasado las x al segundo miembro para que se simplifiquen en un sumando con coeficiente positivo. Además, la penúltima desigualdad leída de derecha a izquierda es exactamente igual a la última desigualdad leída en la forma habitual. Más adelante, representaremos gráficamente la solución obtenida, junto con la de la otra inecuación, para obtener la solución del sistema.

- $\dfrac{2x+6}{5} \le \dfrac{6-3x}{4} \quad \Rightarrow$ Pasamos los divisores multiplicando a los miembros contrarios; como ambos son positivos, no cambia el sentido de la desigualdad:
  $4(2x + 6) \le 5(6 - 3x) \;\Rightarrow\; 8x + 24 \le 30 - 15x \;\Rightarrow\; 8x + 15x \le 30 - 24 \;\Rightarrow$
  $\Rightarrow\; 23x \le 6 \;\Rightarrow\; x \le \dfrac{6}{23}$

Llevamos a un mismo gráfico ambas soluciones:



Y observamos que los valores de x que son soluciones de ambas inecuaciones, es decir, los que verifican las condiciones de la solución de la primera y, a la vez, las de la solución de la segunda inecuación, o sea, los que están en las dos zonas coloreadas a la vez, son los valores de x del intervalo (–12/7,6/23], que está abierto en –12/7, ya que este punto es solución de la segunda inecuación (zona inferior, azul), pero no de la primera (zona superior, rosa), y cerrado en 6/23, pues dicho valor está en ambas zonas. Por tanto, la solución del sistema son los valores del intervalo:

$$\boxed{(-12/7,\ 6/23])}$$

4. Inecuaciones polinómicas de grado superior a 1 e inecuaciones racionales

El método general de resolución requiere descomponer factorialmente los polinomios intervinientes. Remitimos al documento sobre *Factorización de Polinomios* publicado en la web.

Inecuaciones polinómicas de grado superior a 1 e inecuaciones racionales

Cuando tenemos un polinomio de grado superior a 1, o un cociente de polinomios en un miembro de la inecuación, y cero en el otro, procedemos de la siguiente forma.

En primer lugar, descomponemos factorialmente los polinomios, tanto del numerador como del denominador. Al hacerlo, obtenemos también las raíces de todos ellos.

Reescribimos la inecuación inicial con los polinomios factorizados.

Ordenamos de menor a mayor todas las raíces obtenidas de todos los polinomios intervinientes. Las dibujamos sobre la recta real y separamos ésta en intervalos *abiertos siempre*.

Escribimos un cuadro con dichos intervalos y las raíces, en orden. Hallamos los signos dentro de cada intervalo o para cada raíz en un cuadro. Lo mostramos todo con un ejemplo.

4) Resolver: $3x^3 + 12x^2 + 3x - 18 > 0$.

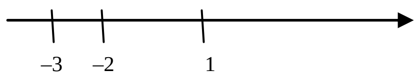
Ya tenemos, de un problema anterior, el polinomio factorizado. La inecuación queda así:

$$3(x - 1)(x + 2)(x + 3) > 0$$

Pasando 3 dividiendo al segundo miembro, como 0/3 = 0 y no cambia el sentido de la desigualdad, al ser 3 positivo, tenemos que resolver:

$$(x - 1)(x + 2)(x + 3) > 0$$

Separamos la recta real en intervalos mediante las raíces obtenidas: 1, –2 y –3:



Los intervalos que se obtienen entre raíz y raíz, de izquierda a derecha, son:

$$(-\infty, -3),\ (-3, -2),\ (-2, 1) \text{ y } (1, +\infty).$$

Pues bien. Como la inecuación es $(x - 1)(x + 2)(x + 3) > 0$, queremos averiguar los valores de x que hacen estrictamente positivo el producto $(x - 1)(x + 2)(x + 3)$. Dentro de cada uno de los intervalos resultantes, anteriormente escritos, el signo es el mismo, cualquiera que sea el valor de x que escojamos. Así que escribimos y completamos el cuadro siguiente:

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1,+\infty)$
$x - 1$	–	–	–	–	–	0	+
$x + 2$	–	–	–	0	+	+	+
$x + 3$	–	0	+	–	+	+	+
$(x - 1)(x - 2)(x + 3)$	–	0	+	0	–	0	+

El cuadro se completa así. Tomamos un valor cualquiera del primer intervalo: $(-\infty, -3)$. Por ejemplo $x = -14$ (con cualquier valor que escojamos, obtendremos los mismos signos). Evaluamos los signos de los tres factores $x - 1$, $x + 2$ y $x + 3$ para el valor escogido $x = -14$, y los escribimos en la columna del intervalo $(-\infty, -3)$. En la fila última, escribimos el producto de los tres signos obtenidos. Y hacemos lo mismo para el resto de las columnas.
La última fila del cuadro nos proporciona los signos que toma $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$ en cada intervalo o en cada punto que separa los intervalos. Como la inecuación:

$$(x - 1)(x + 2)(x + 3) > 0$$

exige que dicho producto sea positivo, y no vale el 0 (tiene que ser mayor estrictamente que cero), tomamos los intervalos que nos dan el signo necesario, incluyendo a los extremos si son válidos (en nuestro caso, no; porque no es válido el igual a cero). Así, la solución de la inecuación es:

$$\boxed{(-3, -2) \cup (1, +\infty)}$$

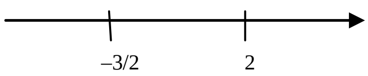
5) Resolver la inecuación $\dfrac{2x+3}{x-2} \le 0$ (Selectividad para mayores de 25 años, 2007)

Tenemos un cociente de dos polinomios. El de arriba no está factorizado convenientemente. Pero como $2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -3/2$, queda así: $2(x + 3/2)$.
Luego la inecuación se transforma en:

$$\frac{2(x+3/2)}{x-2} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3/2}{x-2} \le 0$$

Porque pasamos 2 (positivo) dividiendo al segundo miembro, sin que cambie el sentido de la desigualdad.

Creamos el cuadro. Dibujamos las raíces sobre la recta real, para ver qué intervalos hay que usar:



	$(-\infty, -3/2)$	$-3/2$	$(-3/2, 2)$	2	$(2,+\infty)$
$x + 3/2$	–	0	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	0	+
$\dfrac{x+3/2}{x-2}$	+	0	–	$\nexists$	+

Hay que tener presente que no se puede dividir entre 0. Por ello no existe el cociente cuando $x = 2$.

Como nos valen los signos negativos y el 0, puesto que la inecuación es $\dfrac{x+3/2}{x-2} \leq 0$, la solución final es: $\boxed{[-3/2, 2)}$.

6) Resolver la inecuación $-x^2 - 4x - 3 \geq 0$

Cuando tenemos una inecuación constituida por un polinomio de segundo grado en un miembro y 0 en el otro, además del método expuesto de factorización de polinomios, podemos emplear un método gráfico, probablemente más rápido, basado en trazar un esbozo de la gráfica de la parábola y = *polinomio de segundo grado de la inecuación*. Veámoslo en este caso.

Llamamos $y = -x^2 - 4x - 3$.

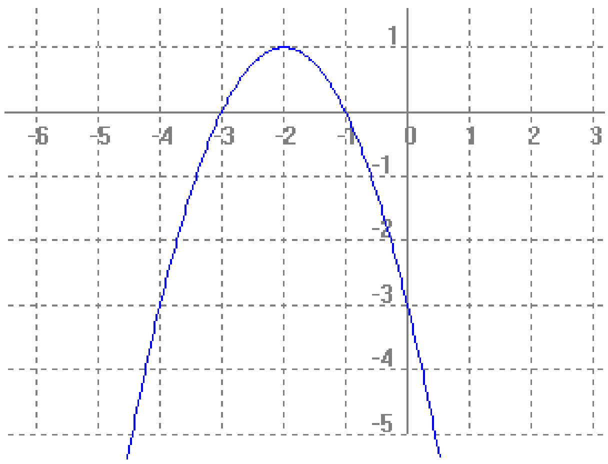
Se trata de una parábola, pues su ecuación es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

- Como el coeficiente de x^2 es negativo ($a = -1$), la parábola se abre hacia abajo (es *cóncava*), con un máximo relativo.
- Las intersecciones con el eje OX son:
  - $y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = -x^2 - 4x - 3$. Resolvemos la ecuación de segundo grado. Para ello, siempre es más cómodo que el coeficiente de x^2 no sea negativo. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1, queda así: $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-4-2}{2} = -3 \\ \dfrac{-4+2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Corta en $\boxed{(-3,\ 0)\ \text{y}\ (-1,\ 0)}$. (Recordar que los valores de x obtenidos partían de obligar a que $y = 0$).



Con estos datos podemos ya trazar, de forma aproximada, la gráfica, que es la de la ilustración adjunta.

Para resolver la inecuación $-x^2 - 4x - 3 \geq 0$, utilizamos una variable auxiliar y. Llamamos $y = -x^2 - 4x - 3$. Entonces, la solución de la inecuación $-x^2 - 4x - 3 \geq 0$ son los valores de x que hacen que $y \geq 0$.

La relación entre x e y la describe la función $y = -x^2 - 4x - 3$, que la parábola dibujada. Nos vamos a su gráfica y observamos qué valores de x hacen que y sea mayor o igual que cero. Deducimos que son los correspondientes a la zona de la gráfica que está por encima del eje OX, incluyendo los puntos de corte de dicha gráfica con el eje *OX*, porque también son válidos los valores de x que hacen que $y = 0$. Y son aquellos que están en el intervalo [– 3, – 1]. Por tanto, la solución final son los valores $\boxed{x \in [-3, -1]}$.

7) Resolver la inecuación $\dfrac{x+5}{-4x^2-4x+15} \geq 0$

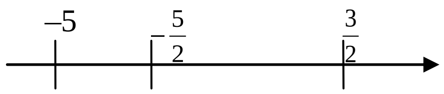
Para solucionar esta inecuación, descomponemos factorialmente el denominador (el numerador es, ya, un polinomio irreducible). Lo hacemos resolviendo la ecuación $-4x^2 - 4x + 15 = 0 \iff 4x^2 + 4x - 15 = 0$:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+240}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{-4 \pm 16}{8} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-4-16}{8} = \dfrac{-20}{8} = -\dfrac{5}{2} \\ = \dfrac{-4+16}{8} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

Por tanto, $-4x^2 - 4x + 15 = -4\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$. De donde la inecuación a resolver es:

$$\frac{x+5}{-4\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)} \geq 0 \iff \boxed{\frac{x+5}{\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)} \leq 0}$$

Puesto que al pasar – 4 multiplicando al otro miembro cambia el sentido de la desigualdad, puesto que – 4 < 0. Como los números que anulan cada uno de los factores intervinientes son:



dividimos $\mathbb{R}$ en intervalos mediante esos tres puntos, obteniendo el siguiente cuadro. Dentro de cada intervalo resultante, el signo de cada uno de los factores anteriores permanece constante, por lo que, para hallarlo, basta dar a x un valor cualquiera dentro del intervalo en cuestión. Con ello, nos queda:

	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -\frac{5}{2})$	$-\frac{5}{2}$	$(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, +\infty)$
$x+5$	–	0	+	…	+	…	+
$x+\frac{5}{2}$	–	…	–	0	+	…	+
$x-\frac{3}{2}$	–	…	–	…	–	0	+
$\frac{x+5}{\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}$	–	0	+	$\nexists$	–	$\nexists$	+
¿Sirven? →	Si	Si	No	No	Si	No	No

Al rellenar el cuadro, tenemos en cuenta que si se anula el denominador no existe el resultado final de la expresión cuyo signo estamos evaluando. Por tanto, los puntos que sirven como resultado de la inecuación son:

$$\boxed{(-\infty, -5] \cup \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)}$$