

Examen de Matemáticas 4º de ESO

Problema 1 Primera evaluación:

1. Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$3 ; -\sqrt{5} ; 2,125125125\dots ; -\frac{9}{4} ; -1$$

2. Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(1 + x^2) - 1 = \log(x - 2)$$

3. Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{x + 3} \geq 0$$

Problema 2 Segunda evaluación:

1. Calcular:

(a) Expresa el 915° como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de 360°

(b) Expresa en grados $\frac{3\pi}{4}$ radianes

(c) Expresa en radianes 215°

2. Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α , que pertenece al tercer cuadrante, y sabiendo que $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$

3. Calcular la altura del pico de una montaña, sabiendo que, en ese momento del día, el sol incide con sus rayos sobre el suelo con un ángulo de 75° y provoca una sombra sobre el suelo de 53 metros.

Problema 3 Tercera evaluación:

1. Dada la progresión 6, 12, 18, 24, 30, \dots

(a) Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.

(b) Calcular en término a_n , y r o d si procede.

(c) Calcular la suma de los diez primeros términos.

2. Calcular los siguientes límites

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - x - 1} \right)^{2x}$$

3. Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2kx - 1 & \text{si } x < 3 \\ x + 2k & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \text{ es continua en todo } R$$

SOLUCIONES

Problema 1 Primera evaluación:

1. Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$3 ; -\sqrt{5} ; 2,125125125\dots ; -\frac{9}{4} ; -1$$

Solución:

3 es un número natural $3 \in N$.

$-\sqrt{5}$ es un número irracional.

$2,125125125\dots$ es un número racional $2,\overline{125} \in Q$.

$-\frac{9}{4}$ es un número racional $-\frac{9}{4} \in Q$.

-1 es un número entero $-1 \in Z$.

2. Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(1+x^2) - 1 = \log(x-2)$$

Solución:

$$\log(1+x^2) - 1 = \log(x-2) \implies \log(1+x^2) - \log 10 = \log(x-2) \implies$$

$$\log\left(\frac{1+x^2}{10}\right) = \log(x-2)$$

$$\frac{1+x^2}{10} = x-2 \implies 1+x^2 = 10x+10 \implies x^2 - 10x + 21 = 0 \implies$$

$$x = 7, x = 3$$

3. Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{x + 3} \geq 0$$

Solución:

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{x + 3} = \frac{(x-7)(x-3)}{x+3} \geq 0$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, 7)$	$(7, +\infty)$
$x + 3$	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	+	+
$x - 7$	-	-	-	+
$\frac{(x-3)(x-7)}{x+3}$	-	+	-	+

La solución pedida sería:

$$(-3, 3] \cup [7, +\infty)$$

Problema 2 Segunda evaluación:

1. Calcular:

- Expresa el 915° como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de 360°
- Expresa en grados $\frac{3\pi}{4}$ radianes
- Expresa en radianes 215°

Solución:

- $915^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 195^\circ \implies 2$ vueltas y 195°
- $\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 135^\circ$
- (c)

$$\begin{cases} 180^\circ \longrightarrow \pi \\ 215^\circ \longrightarrow x \end{cases} \implies x = \frac{215 \cdot \pi}{180} = 1,194 \text{ rad}$$

2. Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α , que pertenece al tercer cuadrante, y sabiendo que $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$

Solución:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \implies \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \implies \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \implies$$

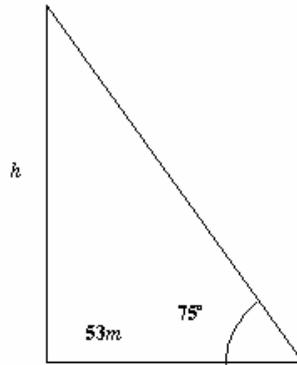
$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \implies \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ ya que estamos en el segundo cuadrante.}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

3. Calcular la altura del pico de una montaña, sabiendo que, en ese momento del día, el sol incide con sus rayos sobre el suelo con un ángulo de 75° y provoca una sombra sobre el suelo de 53 metros.

Solución:

$$\tan 75^\circ = \frac{h}{53} \implies h = 53 \cdot \tan 75^\circ = 197,798 \text{ metros}$$



Problema 3 Tercera evaluación:

1. Dada la progresión 6, 12, 18, 24, 30, ...
- Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.
 - Calcular en término a_n , y r o d si procede.
 - Calcular la suma de los diez primeros términos.

Solución:

- La diferencia entre dos términos consecutivos es siempre 6, luego se trata de una progresión aritmética.
- La diferencia es $d = 6$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 6 + (n - 1) \cdot 6 = 6 + 6n - 6 = 6n$$

- $a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d = 6 + 9 \cdot 6 = 60$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{6 + 60}{2} \cdot 10 = 330$$

2. Calcular los siguientes límites

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 1}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - x - 1} \right)^{2x}$

Solución:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 1} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1} = \infty$

$$\begin{aligned}
(c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - x - 1} \right)^{2x} &= (1^\infty) = e^\lambda = e^1 \\
\lambda &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - x - 1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \left(\frac{2x^2 + 1 - (2x^2 - x - 1)}{2x^2 - x - 1} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x}{2x^2 - x - 1} = 1
\end{aligned}$$

3. Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2kx - 1 & \text{si } x < 3 \\ x + 2k & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \text{ es continua en todo } R$$

Solución:

Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2kx - 1) = 6k - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2k) = 3 + 2k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R , salvo en el 2, mejor dicho, en el 2 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:

$$6k - 1 = 3 + 2k \implies 4k = 4 \implies k = 1$$