

Ejercicio. 8.1.

Dados los conjuntos:

$$A = \{a, b, c, d, e\},$$

$$B = \{e, f, g, h\},$$

$$C = \{a, e, i, o, u\}$$

Determinar los siguientes conjuntos:

$$A \cup B \cup C, A \cap B \cap C, A \setminus B, A \setminus (B \cup C), (A \cap B) \cup C, C \cap (A \setminus B), B \times C, C \times B, A \times B \times C.$$

SOLUCIÓN. Se tiene:

$$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u\},$$

$$A \cap B \cap C = \{e\},$$

$$A \setminus B = \{a, b, c, d\},$$

$$A \setminus (B \cup C) = \{b, c, d\},$$

$$(A \cap B) \cup C = \{a, e, i, o, u\},$$

$$C \cap (A \setminus B) = \{a\},$$

$$B \times C = \{(e, a), (e, e), (e, i), (e, o), (e, u), (f, a), (f, e), (f, i), (f, o), (f, u), (g, a), (g, e), (g, i), (g, o), (g, u), (h, a), (h, e), (h, i), (h, o), (h, u)\},$$

$$C \times B = \{(a, e), (a, f), (a, g), (a, h), (e, e), (e, f), (e, g), (e, h), (i, e), (i, f), (i, g), (i, h), (o, e), (o, f), (o, g), (o, h), (u, e), (u, f), (u, g), (u, h)\},$$

$$A \times B \times C = \{(a, e, a), \dots, (e, h, u)\}, \text{ tiene 100 elementos.}$$

□

Ejercicio. 8.2.

Dado el conjunto $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y los subconjuntos $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $T = \{0, 3, 6, 9\}$. Calcular los siguientes subconjuntos de X :

$$P \cup T, P \cap T, P \times T, P^c, T^c, P^c \cap T, P \cup T^c.$$

Ahora calcular los siguientes subconjuntos de $X \times X$:

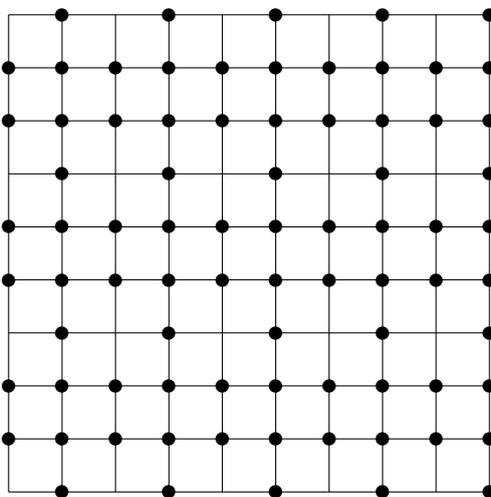
$$P^c \times P^c, P^c \times T^c, (P \times T)^c, P^c \times T, (P \times T^c) \cap (P \times P^c), (P \cap T) \times (P^c \cap T^c).$$

SOLUCIÓN. En el primer caso tenemos:

$$\begin{aligned} P \cup T &= \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}, \\ P \cap T &= \{0, 6\}, \\ P \times T &= \{(0, 0), (0, 3), (0, 6), (0, 9), (2, 0), (2, 3), (2, 6), (2, 9), (4, 0), (4, 3), (4, 6), (4, 9), \\ &\quad (6, 0), (6, 3), (6, 6), (6, 9), (8, 0), (8, 3), (8, 6), (8, 9)\}, \\ P^c &= \{1, 3, 5, 7, 9\}, \\ T^c &= \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \\ P^c \cap T &= \{3, 9\}, \\ P \cup T^c &= \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}. \end{aligned}$$

En el segundo caso:

$$\begin{aligned} P^c \times P^c &= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (3, 9), (5, 1), (5, 3), (5, 5), \\ &\quad (5, 7), (5, 9), (7, 1), (7, 3), (7, 5), (7, 7), (7, 9), (9, 1), (9, 3), (9, 5), (9, 7), (9, 9)\}, \\ P^c \times T^c &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 7), (1, 8), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 7), (3, 8), (5, 1), \\ &\quad (5, 2), (5, 4), (5, 5), (5, 7), (5, 8), (7, 1), (7, 2), (7, 4), (7, 5), (7, 7), (7, 8), (9, 1), (9, 2), (9, 4), \\ &\quad (9, 5), (9, 7), (9, 8)\}, \\ (P \times T)^c &= \{(0, 1), \dots, (9, 9)\}, \end{aligned}$$



$$P^c \times T = \{(1, 0), (1, 3), (1, 6), (1, 9), (3, 0), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (5, 0), (5, 3), (5, 6), (5, 9), (7, 0), (7, 3), (7, 6), (7, 9), (9, 0), (9, 3), (9, 6), (9, 9)\},$$

$$(P \times T^c) \cap (P \times P^c) = \{(0, 1), (0, 5), (0, 7), (2, 1), (2, 5), (2, 7), (4, 1), (4, 5), (4, 7), (6, 1), (6, 5), (6, 7), (8, 1), (8, 5), (8, 7)\},$$

$$(P \cap T) \times (P^c \cap T^c) = \{(0, 1), (0, 5), (0, 7), (6, 1), (6, 5), (6, 7)\}$$

□

Ejercicio. 8.3.

Consideramos el conjunto \mathbb{N} de los números naturales y los subconjuntos $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\}$ y $T = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Describir los siguientes subconjuntos de \mathbb{N} y de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$P \cup T, P \cap T, P \times T, P^c, T^c, P^c \cap T, P \cup T^c$$

SOLUCIÓN. Se tiene:

- $P \cup T$, son los números naturales pares o múltiplos de tres.
- $P \cap T$, son los números pares y múltiplos de 3, por lo tanto los números múltiplos de 6.
- $P \times T$, son los pares de números en los que el primero es par y el segundo es múltiplo de 3.
- P^c , son los números impares.
- T^c , son los números que no son múltiplos de 3.
- $P^c \cap T$, son los números impares que son múltiplos de 3.
- $P \cup T^c$, son los números pares que no son múltiplos de 3.

□

Ejercicio. 8.4.

Dado el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$, determinar el conjunto $P(X)$.

SOLUCIÓN. Tenemos:

$$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}.$$

Tiene 16 elementos.

□

Ejercicio. 8.5.

Si queremos obtener una aplicación $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, ¿puede usarse la fórmula: $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b}{a}$?

SOLUCIÓN. No ya que no está definido $f\left(\frac{0}{1}\right)$. □

Ejercicio. 8.6.

Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

(1) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida $f(n) = n^2$.

(2) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida $f(x) = 2x$.

(3) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida $f(n) = n + 1$.

(4) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida $f(n) = n + 1$.

(5) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida $f(x) = \frac{3x+2}{4}$.

(6) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida $f(x) = +\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN.

(1) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida $f(n) = n^2$. Es inyectiva y no es sobreyectiva.

(2) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida $f(x) = 2x$. Es inyectiva y no es sobreyectiva.

(3) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida $f(n) = n + 1$. Es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto es biyectiva.

(4) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida $f(n) = n + 1$. Es inyectiva y no es sobreyectiva.

(5) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, definida $f(x) = \frac{3x+2}{4}$. Es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto es biyectiva.

(6) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida $f(x) = +\sqrt{x}$. Es inyectiva y no es sobreyectiva. □

Ejercicio. 8.7.

Calcular $g \circ f$ y $f \circ g$, cuando sea posible, para cada uno de los siguientes pares de aplicaciones:

$$(a) f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(x) = x + 1; \quad g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, g(x) = x^2.$$

$$(b) f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, f(x) = \frac{3x+2}{4}; \quad g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, g(x) = x^2.$$

$$(c) f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = +\sqrt{x}; \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2.$$

SOLUCIÓN.

$$(a) g \circ f(x) = (x+1)^2; \quad x \xrightarrow{f} x+1 \xrightarrow{g} (x+1)^2. \quad f \circ g(x) = x^2 + 1; \quad x \xrightarrow{g} x^2 \xrightarrow{f} x^2 + 1.$$

$$(b) g \circ f(x) = \left(\frac{3x+2}{4}\right)^2; \quad x \xrightarrow{f} \frac{3x+2}{4} \xrightarrow{g} \left(\frac{3x+2}{4}\right)^2. \quad f \circ g(x) = \frac{3x^2+2}{4}; \quad x \xrightarrow{g} x^2 \xrightarrow{f} \frac{3x^2+2}{4}.$$

$$(c) g \circ f(x) = x; \quad x \xrightarrow{f} +\sqrt{x} \xrightarrow{g} (+\sqrt{x})^2 = x. \quad f \circ g(x) = x; \quad x \xrightarrow{g} x^2 \xrightarrow{f} +\sqrt{x^2} = x.$$

□

Ejercicio. 8.8.

Para el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ encontrar todas las aplicaciones $f : A \longrightarrow A$ tales que $f \circ f = 1_A$.

SOLUCIÓN. La aplicación f tiene que ser una biyección, por lo tanto si escribimos las imágenes de a, b, c, d en una cuaterna $(f(a), f(b), f(c), f(d))$, ésta deber ser una permutación de A . Como tenemos $4! = 24$ permutaciones de A , éstas son las aplicaciones que verifican la condición pedida.

Todas las permutaciones son:

$$(a, b, c, d) \quad (a, b, d, c) \quad (a, c, b, d) \quad (a, c, d, b) \quad (a, d, b, c) \quad (a, d, c, b)$$

$$(b, a, c, d) \quad (b, a, d, c) \quad (b, c, a, d) \quad (b, c, d, a) \quad (b, d, a, c) \quad (b, d, c, a)$$

$$(c, b, a, d) \quad (c, b, d, a) \quad (c, a, b, d) \quad (c, a, d, b) \quad (c, d, b, a) \quad (c, d, a, b)$$

$$(d, b, c, a) \quad (d, b, a, c) \quad (d, c, b, a) \quad (d, c, a, b) \quad (d, a, b, c) \quad (d, a, c, b)$$

□

Ejercicio 8.9.

Sean $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{a, b\}$. Sea $f : X \rightarrow Y$ definida por

$$f(1) = f(3) = a, \quad f(2) = b.$$

Determina:

$$f_*({1, 3}), f_*({1, 2}), f^*({a}), f^*({b}), f^{\uparrow}({a, b}).$$

SOLUCIÓN. Tenemos:

- $f_*({1, 3}) = \{b\}$.
- $f_*({1, 2}) = \{a, b\}$.
- $f^*({a}) = \{2\}$.
- $f^*({b}) = \{1, 3\}$.
- $f^*({a, b}) = \{1, 2, 3\}$.

□

Ejercicio 8.10.

Dado un conjunto X con n elementos, definir una aplicación biyectiva de $P(X)$ en el producto

cartesiano $\overbrace{\{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}}^n$. Determinar cual es el cardinal de $P(X)$.

SOLUCIÓN. Primero ordenamos los elementos de X , por ejemplo x_1, x_2, \dots, x_n . A continuación, para cada subconjunto $S \subseteq X$ definimos una aplicación $f_S : X \rightarrow \{0, 1\}$ mediante

$$f_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

Ya solo falta asignar a cada f_S la lista $(f_S(x_1), \dots, f_S(x_n)) \in \overbrace{\{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}}^n$, que evidentemente define una biyección.

Es claro que entonces el cardinal de $P(X)$ es 2^n .

□

Ejercicio. 8.11.

Sea el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$. En el conjunto $P(X)$ definimos la siguiente relación:

ARB si la suma de los elementos de A es igual a la suma de los elementos de B .

- (a) Probar que R es una relación de equivalencia.
(b) Describir el conjunto cociente $P(X)/R$.

SOLUCIÓN.

- (a) Claro que R verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, luego es una relación de equivalencia.
(b) La suma máxima de los elementos de un subconjunto de X es 6; entonces cada clase estará determinada por un entero entre 0 y 6. Tenemos pues siete clases:

0 : \emptyset
1 : $\{1\}$
2 : $\{2\}$
3 : $\{1, 2\}, \{3\}$
4 : $\{1, 3\}$
5 : $\{2, 3\}$
6 : $\{1, 2, 3\}$.

□

Ejercicio. 8.12.

Para cada una de las relaciones de equivalencia definida sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dar una interpretación geométrica del conjunto cociente:

- (a) $(a, b)R(c, d)$ si $a + b = c + d$.
- (b) $(a, b)R(c, d)$ si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
- (c) $(a, b)R(c, d)$ si $\begin{cases} b = 0 \text{ y } d = 0 \text{ o bien} \\ b \neq 0, d \neq 0, \text{ y } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \end{cases}$

SOLUCIÓN.

- (a) La clase de (a, b) está determinada por un número r , que es la suma de a y b . Podemos escribir

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -x + r\}$$

Por lo tanto cada clase es una recta paralela a la recta de ecuación $Y = -X$.

- (b) La clase de (a, b) está determinada por un número r , no negativo, que es la suma $a^2 + b^2$. Por lo tanto cada clase de equivalencia es una circunferencia centrada en el origen o el punto $(0, 0)$.
- (c) Es claro que la recta $Y = 0$ es una clase de equivalencia. Si $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ verifica $b \neq 0$ y llamamos $k = a/b$, entonces la clase de (a, b) es $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \mid x/y = k\}$, es por tanto la recta $Y = kX$ salvo el punto $(0, 0)$.

□

Ejercicio. 8.13.

En el conjunto $P(\mathbb{N})$ se define la siguiente relación:

$$XRY \text{ si } |X| = |Y|.$$

Probar que esta relación es de equivalencia y describir el conjunto cociente.

SOLUCIÓN. Es claro que es una relación de equivalencia. El conjunto cociente es el conjunto de los números naturales; n es la clase del conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$ junto con la clase de \mathbb{N} , ya que todos los subconjuntos infinitos de \mathbb{N} son biyectivos y por lo tanto tienen el mismo cardinal. \square

Ejercicio. 8.14.

Considerar la aplicación $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ que a cada número entero n le asocia el resto de dividir n por 7.

- (a) Calcular $f(259)$.
- (b) Calcular $\text{Im}(f)$.
- (c) Calcular la descomposición canónica de f .

SOLUCIÓN.

- (a) Como $259 = 7 \times 37$, el resto de la división es igual a 0 y por lo tanto $f(259) = 0$.
- (b) La imagen de f es el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- (c) La descomposición canónica es:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ \mathbb{N}/R & \xrightarrow{b} & \text{Im}(f) \end{array}$$

donde R es la relación de equivalencia definida por $f: nRm$ si $n - m$ es múltiplo de 7, por lo tanto tenemos siete clases de equivalencia:

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{0, 7, 14, \dots, -7, -14, \dots\} \\ \bar{1} &= \{1, 8, \dots, -6, -13, \dots\} \\ \bar{2} &= \{2, \dots\} \\ \bar{3} &= \{3, \dots\} \\ \bar{4} &= \{4, \dots\} \\ \bar{5} &= \{5, \dots\} \\ \bar{6} &= \{6, \dots\} \end{aligned}$$

Entonces b está definida $b(\bar{x}) = x$.

□

Ejercicio. 8.15.

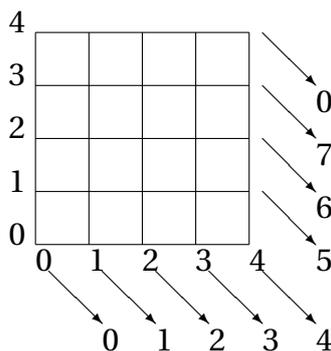
Se considera la aplicación $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, que asocia al par (x, y) el resto de la división de $x + y$ por 8.

(a) Calcular $f(3, 4)$.

(b) Calcular la descomposición canónica de f

SOLUCIÓN. El resto de la división de $3 + 4 = 7$ por 8 es 7. Por lo tanto $f(3, 4) = 7$.

La aplicación f se puede representar por el siguiente gráfico, en el que se asigna a cada elemento su clase para la relación de equivalencia definida por f .



El conjunto cociente es:

$$C = \{ \overline{(0,0)}, \overline{(1,0)}, \overline{(2,0)}, \overline{(3,0)}, \overline{(4,0)}, \overline{(4,1)}, \overline{(4,2)}, \overline{(4,3)} \}$$

La descomposición canónica es:

$$\begin{array}{ccc}
 \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\} & \xrightarrow{f} & \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\
 \downarrow p & & \parallel i \\
 C & \xrightarrow{b} & \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}
 \end{array}$$

□