

**Opción A**

**Ejercicio nº 1 de la opción A del modelo 6 del 99**

(a) [1 punto] Dibuja la región limitada por la gráfica de la función  $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x)=\ln(1+x)$ , la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el origen y la recta  $x=1$ .

(Nota:  $\ln(t)$  es el logaritmo neperiano de  $t$ ).

(b) [1'5 puntos] Halla el área de dicha región.

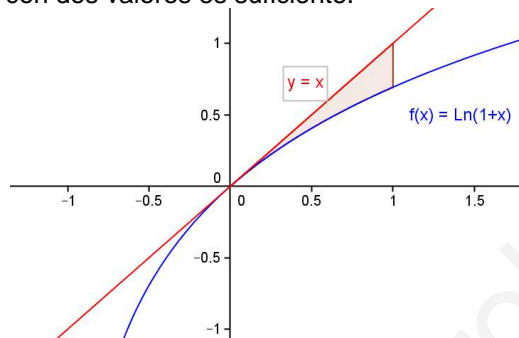
**Solución**

(a)

$f(x) = \ln(1+x); f'(x) = 1/(x+1); f(0) = \ln(1) = 0; f'(0) = 1/(0+1) = 1$

Recta tangente en  $x = 0$  es  $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ . Es decir  $y - 0 = 1(x - 0)$ , simplificando  $y = x$

La gráfica de  $\ln(1+x)$  ( en rojo) es igual que la de  $\ln(x)$  pero desplazada una unidad a la izquierda . La gráfica de  $y = x$  (en rojo) es una recta y con dos valores es suficiente.



(b)

Recordamos que  $\int \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - x$ , por tanto  $\int \ln(x+1)dx = (x+1) \cdot \ln(x+1) - (x+1)$ .

Área= $\int_0^1 (x-\ln(1+x))dx = \left[ \frac{x^2}{2} - ((x+1)\ln(x+1) - (x+1)) \right]_0^1 = 1/2 - (2\ln(2) - 2) - (0 - (0 - 1)) = 3/2 - 2\ln(2) \approx 0.1137$  u.a.

**Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 6 del 99**

La población de una colonia de aves evoluciona con el tiempo  $t$ , medido en años, según la función

$P : [2,12] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $P(t) = \begin{cases} 10+(t-6)^2 & \text{si } 2 \leq t \leq 10 \\ 28-2^{t-9} & \text{si } 10 < t \leq 12. \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Representa gráficamente la función  $P$  e indica en qué periodos de tiempo crece o decrece la población.

(b) [0'5 puntos] Indica los instantes en los que la población alcanza los valores máximo y mínimo..

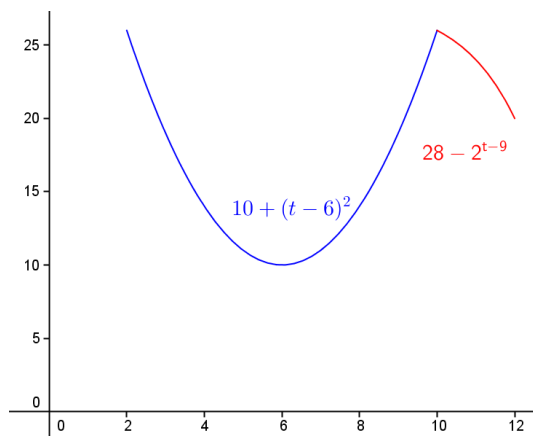
(c) [0'5 punto] Si la población evolucionara a partir de  $t=12$  con la misma función que para  $10 < t \leq 12$ , ¿llegaría a extinguirse? Justifica la respuesta dando, en caso afirmativo, el instante de la extinción

**Solución**

(a)

La gráfica de  $10 + (t - 6)^2$  es la misma que la de la parábola  $t^2$  pero desplazada 6 unidades a la derecha en abscisas y 10 hacia arriba en ordenadas.

La gráfica de  $28 - 2^{t-9}$ , es la misma que la de  $-2^t$ , pero desplazada 9 unidades hacia la derecha en abscisas y 28 hacia arriba en ordenadas



$P'(t) = \begin{cases} 2(t-6) & \text{si } 2 < t < 10 \\ -2^{t-9} & \text{si } 10 < t < 12 \end{cases}$

Si  $t > 6$  y  $t < 10$ ,  $P'(t) > 0$  luego  $P(t)$  crece

Si  $t < 6$ ,  $P'(t) < 0$ , luego  $P(t)$  decrece

Si  $10 < t < 12$ , como  $2^a > 0$ , resulta que  $-2^a < 0$ , luego  $P(t)$  decrece

(b)

En  $t = 6$  hay un mínimo. Veamos los valores de  $P(t)$  en 2, 5, 10 y 12. El mayor será el máximo absoluto y el menor será el mínimo absoluto

$$P(2) = 26$$

$$P(6) = 10$$

$$P(10) = 26$$

$$P(12) = 20,$$

Por tanto alcanza el máximo absoluto en  $x = 2$  y  $x = 10$  y vale 26. Alcanza su mínimo absoluto en  $x = 6$  y vale 10.

(c)

Si  $t > 10$ ,  $P(t) = 28 - 2^{t-9}$ .

La población llegaría a extinguirse si  $P(t) = 0$ , es decir  $28 = 2^{t-9}$ , es decir  $t - 9 = \log_2(28)$ , por tanto se extinguiría cuando  $t = 9 + \log_2(28) \approx 13.80735$  años

### Ejercicio nº 3 de la opción A del modelo 6 del 99

Sea  $C$  la matriz, que depende de un parámetro  $m$ , dada por  $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿Para qué valores del parámetro  $m$  no tiene inversa la matriz  $C$ ?

(b) [1 punto] Calcula la matriz inversa de  $C$  para  $m=2$ .

#### Solución

(a)

La matriz  $C$  no tiene inversa si  $|C| = 0$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + m = 0$$

por tanto con  $m = -1$ , la matriz  $C$  no tiene inversa.

(b)

Inversa de  $C$  para  $m=2$ .

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3; \quad C^{-1} = \frac{1}{|C|} \text{Adj}(C^t)$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(C^t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{luego } C^{-1} = \frac{1}{|C|} \text{Adj}(C^t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio nº 4 de la opción A del modelo 6 del 99

Sea  $\Pi$  el plano de ecuación  $\Pi \equiv 3x - 2y - 6z = 1$  y sea  $r$  la recta dada en forma paramétrica por

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, -1, 1) \quad (\lambda \in \mathfrak{R})$$

(a) [0.5 puntos] ¿Cómo se define la relación de paralelismo entre una recta y un plano?

(b) [0.75 puntos] En el caso concreto de la recta  $r$  y el plano  $\Pi$ , ¿cómo averiguarías si son paralelos? Comprueba si lo son.

(c) [0.5 puntos] ¿Cómo se define la relación de perpendicularidad entre una recta y un plano?

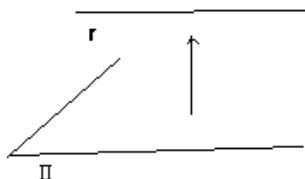
(d) [0.75 puntos] En el caso concreto de la recta  $r$  y el plano  $\Pi$ , ¿cómo averiguarías si son perpendiculares? Comprueba si lo son.

#### Solución

(a)

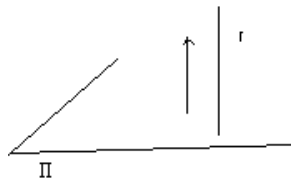
$\Pi \equiv 3x - 2y - 6z = 1$ , su vector normal es  $\mathbf{n} = (3, -2, 6)$

$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, -1, 1)$  ( $\lambda \in \mathfrak{R}$ ) su vector director es  $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$



$r \parallel \Pi$  si  $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$  si  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$

- (b)  
 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (2, -1, 1) \cdot (3, -2, 6) = 2 \neq 0$ , por tanto no son paralelos la recta y el plano.  
 (c)



$r \perp \Pi$  sii  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{n}$  sii  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$  sii  $\mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{n}$

- (d)  
 como  $(2, -1, 1) \neq \lambda(3, -2, 6)$ , la recta y el plano no son perpendiculares.

**Opción B**

**Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 6 del 99**

[2'5 puntos] Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Calcula a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en  $Q = (-1, 3)$  y que la tangente a dicha gráfica en el punto  $M = (0, 1)$  es horizontal.

**Solución**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ;  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$   $f''(x) = 6ax + 2b$   
 $Q(-1, 3)$  punto de inflexión por tanto  $f(-1) = 3$  y  $f''(-1) = 0$   
 $M(0, 1)$  tangencia horizontal, por tanto  $f(0) = 1$  y  $f'(0) = 0$   
 De  $f(-1) = 3$  obtenemos  $3 = -a + b - c + d$   
 De  $f(0) = 1$  obtenemos  $1 = d$   
 De  $f'(0) = 0$  obtenemos  $0 = c$   
 De  $f''(-1) = 0$  obtenemos  $0 = -6a + 2b$   
 Por tanto  $a = 1, b = 3, c = 0$  y  $d = 1$

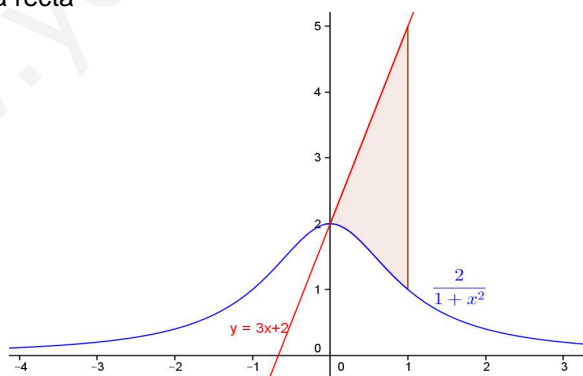
**Ejercicio nº 2 de la opción B del modelo 6 del 99**

[2'5 puntos] Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación  $y = \frac{2}{1+x^2}$  y las rectas de ecuaciones  $x = 1$  e  $y = 3x + 2$

**Solución**

$y = \frac{2}{1+x^2}$  tiene como asíntota horizontal  $y = 0$  en  $\pm\infty$ , porque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1+x^2} = 0$

Es par porque  $f(-x) = f(x)$   
 Corta en  $(0, 2)$  que es máximo  
 La gráfica de  $y = 3x + 2$  es una recta



Tenemos que ver donde se cortan la gráfica de  $y = \frac{2}{1+x^2}$  con la recta  $y = 3x + 2$ , para lo cual lo igualamos  $\frac{2}{1+x^2} = 3x + 2$ , operando obtenemos  $0 = 3x^3 + 2x^2 + 3x = x(3x^2 + 2x + 3) = 0$  de donde  $x = 0$ , pues la ecuación de 2º grado no tiene soluciones reales.

$$\text{Área} = \int_0^1 \left[ (3x+2) - \left( \frac{2}{1+x^2} \right) \right] dx = \left[ \frac{3x^2}{2} + 2x - 2 \operatorname{arctg}(x) \right]_0^1 = \left[ \frac{3}{2} + 2 - 2 \operatorname{arctg}(1) \right] - (0 - 2 \operatorname{arctg}(0)) = \frac{3}{2} + 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= (7 - \pi)/2 \cong 1'93 \text{ u.a.}$$

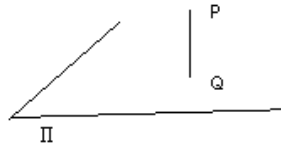
**Ejercicio nº 3 de la opción B del modelo 6 del 99**

Considera el punto  $P = (-1, 2, 1)$

- (a) [1 punto] Determina un punto Q del plano  $\Pi \equiv -3x+y+z+5=0$  de forma que el vector PQ sea perpendicular al plano  $\Pi$ .
- (b) [1 punto] Determina un punto M de la recta  $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-10}{-1}$  de forma que el vector MP sea paralelo al plano  $\Pi$ .
- (c) [0'5 puntos] Calcula el área del triángulo MPQ.

**Solución**

(a)



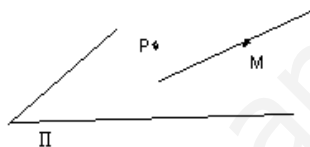
$\Pi \equiv -3x+y+z+5 = 0$ , su vector normal es  $\mathbf{n} = (-3, 1, 1)$   
 la recta  $s \perp$  a  $\Pi$  por P es

$$s \equiv \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1} = \lambda \equiv \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$Q = \Pi \cap s$

$-3(-1-3\lambda) + (2+\lambda) + (1+\lambda) + 5 = 0$ . Operando se obtiene  $11\lambda + 11 = 0$ , de donde  $\lambda = -1$ , y el punto Q sería  $Q(-1-3(-1), 2+(-1), 1+(-1)) = Q(2, 1, 0)$  que es el punto pedido

(b)



$r \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+10}{-1} = \lambda$ , luego  $M(2-\lambda, -1+\lambda, 10-\lambda)$ .  $\Pi \equiv -3x+y+z+5 = 0$ , su vector normal es  $\mathbf{n} = (-3, 1, 1)$

Si  $\vec{MP} \parallel \Pi$ , entonces  $\vec{MP} \perp \mathbf{n}$ , con lo cual  $\vec{MP} \cdot \mathbf{n} = 0$

$$\vec{MP} = (-1-2+\lambda, 2+1-\lambda, 1-10+\lambda)$$

$$\vec{MP} \cdot \mathbf{n} = 0 = -3(-3+\lambda) + 1(3-\lambda) + 1(-9+\lambda), \text{ de donde } \lambda = 1 \text{ y } M(2-1, -1-1, 10-1) = (1, -2, 9)$$

(c)

Como el triángulo MPQ es rectángulo el área es  $\frac{1}{2}$  de cateto por cateto, es decir

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{PQ}| |\vec{PM}| = \frac{1}{2} \sqrt{9+1+1} \sqrt{4+16+64} = \frac{1}{2} \sqrt{924} \text{ u.a.} \quad \vec{PQ} = (3, -1, -1), \vec{PM} = (2, -4, 8)$$

**Ejercicio nº 4 de la opción B del modelo 6 del 99**

[2'5 puntos] En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos.

- El primer lote está compuesto por una botella de cerveza, tres bolsas de cacahuetes y siete vasos y su precio es de 565 ptas.
- El segundo lote está compuesto por una botella de cerveza, cuatro bolsas de cacahuetes y diez vasos y su precio es de 740 ptas.

Con estos datos, ¿podrías averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuetes y un vaso? Justifica la respuesta

**Solución**

$x = \text{cerveza}$        $y = \text{cacahuetes}$        $z = \text{vasos}$

$$1x + 3y + 7z = 565$$

$$1x + 4y + 10z = 740. \quad \text{Piden } x + y + z$$

Restando obtengo  $y + 3z = 175$ . Sustituyo

$$x + 3(175 - 3z) + 7z = 565$$

$$x + 4(175 - 3z) + 10z = 740, \text{ de donde } x - 2z = 40$$

Sumando las dos expresiones en negrita obtenemos  $y + 3z + x - 2z = 175 + 40$ , de donde

$$x + y + z = 215.$$