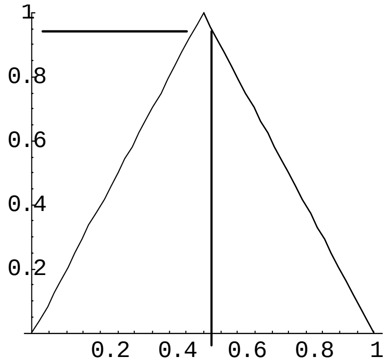
OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 4 de 1998.

En la figura adjunta se representa la gráfica de la función derivada f ‘ de una cierta función $f : [0,1] \to \Re$.



(a) Halla una expresión algebraica de f sabiendo que su gráfica pasa por el origen de coordenadas.
(a) Representa gráficamente la función f.
(a) Estudia la derivabilidad de f ‘.

Solución

(a)
De la figura observamos que la función f ‘(x) está formada por dos trozas de recta y = ax + b.
El primer tramo pasa por (0,0) y (1/2,1), sustituyendo ambos valores en y = ax + b obtenemos b = 0 y a = 2.
El segundo tramo pasa por (1/2,1) y (1,0), sustituyendo ambos valores en y = ax + b obtenemos b = 2 y a = -2.
Es decir la función derivada es

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ -2x+2 & \text{si } 1/2<x<1 \end{cases}$$

Para calcular f(x) aplicamos el teorema fundamental del calculo integral a cada rama, teniendo en cuenta que pasa por (0,0) y que es derivable, para calcular las constantes que me salgan.

Para $0 \le x \le ½$, $f(x) = \int f'(x)dx = \int 2x\, dx = x^2 + K$

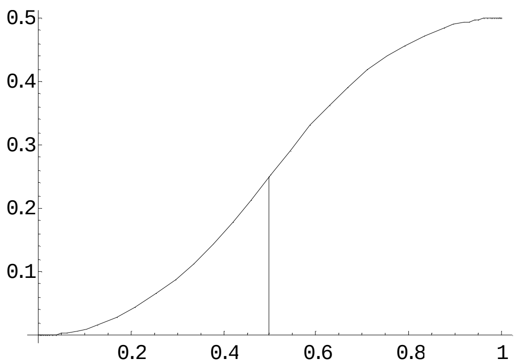
Como f(0) = 0, $0 = 0^2 + K$, de donde K = 0

Para $1/2 < x < 1$, $f(x) = \int f'(x)dx = \int (-2x+2)\, dx = - x^2 + 2x + M$

Como coinciden en x = ½, puesto que es derivable en dicho punto tenemos que
$(1/2)^2 = - (1/2)^2 + 2.(1/2) + M$, de donde M = - ½.

Luego la función pedida es $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ -x^2+2x-1/2 & \text{si } 1/2<x<1 \end{cases}$

(b)
Como ambas ramas son parábolas, sus gráficas son sencillas, el vértice de x^2 es (0,0) y el vértice de $- x^2 + 2x – ½$ es (1,1/2)
Su gráfica es



(c)
De la gráfica de f ‘(x) ya se está viendo que x = ½ es un punto donde no existe la derivada, veámoslo

$$f''(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } 0<x<1/2 \\ -2 & \text{si } 1/2<x<1 \end{cases}$$

Para que exista f ‘’(1/2), tiene que verificarse $f''[(1/2)^+] = f''[(1/2)^-]$, pero
$f''[(1/2)^+] = \lim_{x \to (1/2)+} f''(x) = \lim_{x \to (1/2)} (-2) = -2$

f '' [(1/2)$^-$] = lim $_{x \to (1/2)^-}$ f ''(x) = lim $_{x \to (1/2)}$ (2) = 2
Como f '' [(1/2)$^+$] ≠ f '' [(1/2)$^-$], no existe f ''(1/2)

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 4 de 1998.

Se sabe que la temperatura, medida en grados centígrados, de una cámara frigorífica viene dada por la expresión $f(t) = at^2 + bt + c$ donde t representa las horas transcurridas desde su conexión a la red y a, b y c son tres constantes reales. Al conectarla, la temperatura interior asciende, por efecto del calor del motor, y alcanza su máximo a los tres cuartos de hora. A partir de ese momento comienza a descender la temperatura y transcurrida una hora desde su conexión alcanza los cero grados centígrados. A las dos horas de haberla conectado es de memos tres grados centígrados. Usando estos datos, determina los valores de las constantes a, b y c.

Solución

$f(t) = at^2 + bt + c$, t en horas
máximo en t = ¾, luego f ' (3/4) = 0
f '(t) = 2at +b
De f '(3/4) = 0, obtenemos 0 = (6/4).a + b
De f(1) = 0, obtenemos 0 = a + b + c
De f(2) = -3, obtenemos - 3 = 4a + 2b + c
Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas obtenemos
a = -2, b = 3 y c = - 1

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 4 de 1998.

Sean Π_1 y Π_2 los planos de ecuaciones: $\Pi_1 \equiv x - 2y + z + 3 = 0$ y $\Pi_2 \equiv x - 2y + z - 4 = 0$.
Explica algún procedimiento para saber si un punto de R^3 se encuentra entre Π_1 y Π_2 y aplícalo para saber si el punto P=(2, 2, 1) se encuentra o no entre dichos planos.

Solución

Los planos paralelos a Π_1 son de la forma $\equiv x - 2y + z + d = 0$
Sustituyo el punto P = (2, 2, 1) en el plano y obtengo el valor de d
2 – 2(2) + 1 + d = 0, de donde d = 1
Como son planos paralelos el valor de d nos indica lo "alto" a "bajo" que están, y vemos que el valor obtenido 1 está entre - 4 y 3, por tanto el punto está entre dichos planos.

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 4 de 1998.

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. ¿Existe algún valor real λ para el cual el sistema $AX = \lambda X$ tiene una solución distinta de la trivial? Si la respuesta es afirmativa, indica el valor de λ y resuelve el sistema; si es negativa, di por qué.

Solución

$AX = \lambda X$; $AX - \lambda X = O$; $AX - \lambda . I_3 X = O_3$, donde I_3 es la matriz unidad de orden 3 y O_3 es la matriz nula de orden 3.
De $AX - \lambda . I_3 X = O_3$, obtenemos $(A - \lambda . I_3) . X = O_3$
Para que la ecuación homogénea $(A - \lambda . I_3) . X = O_3$, tenga solución distinta de la trivial, su determinante $|(A - \lambda . I_3)|$ tiene que ser cero.

$$|A-\lambda \cdot I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda+\lambda^2-2) - 2 - 1 + \lambda) + 2(1) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 2)(1+ \lambda^2) = 0$$

y vemos que se anula par $\lambda = 2$. Luego para $\lambda = 2$ el sistema tiene solución distinto de la trivial. Vamos a resolverlo:
El sistema es
$(1-\lambda)x + 2y + 2z = 0$
$- x - \lambda y - 2z = 0$
$- y + (1- \lambda)z = 0$

Tomando $\lambda = 2$ tenemos
$-x + 2y + 2z = 0$
$- x - 2y - 2z = 0$
$- y - z = 0$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Solo necesitamos dos ecuaciones. Tomamos
$- x - 2y – 2z = 0$
$- y - z = 0$
Hacemos $z = m$, y obtenemos sustituyendo $y = -m$, $x = 0$, por tanto la solución del sistema es $(x,y,z) = (0,-m,m)$, con $m \in \Re$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 4 de 1998.

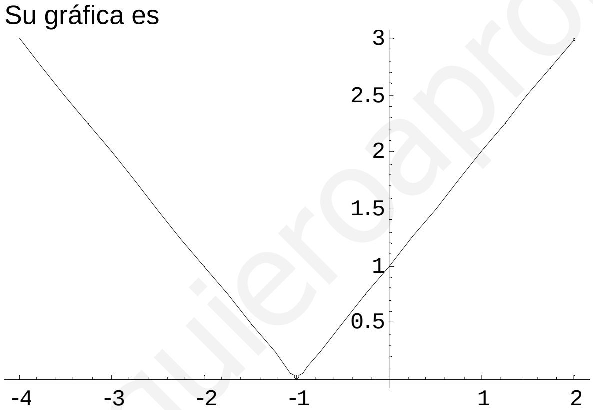
Considera la función $f : \Re \to \Re$ definida por $f(x) = | x + 1|$.
(a) Represéntala gráficamente.
(b) Estudia su derivabilidad.
(c) Calcula $\int_{-2}^{3} f(x)dx$

Solución

(a)

$$f(x)=|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ -x-1 & \text{si} \quad x<-1 \end{cases}$$

Que son dos trozos de recta. Su gráfica es



(b)
Viendo su gráfica se observa que no es derivable en $x = -1$. Veámoslo

$$f(x)=|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ -x-1 & \text{si} \quad x<-1 \end{cases}; \quad f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>-1 \\ -1 & \text{si} \quad x<-1 \end{cases}$$

Tenemos que ver que $f'(-1^+) = f'(-1^-)$, para que exista $f'(-1)$
$f'(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1} (1) = 1$
$f'(-1^-) = \lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1} (-1) = -1$
Como $f'(-1^+) \neq f'(-1^-)$, no existe $f'(-1)$
(c)

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} (-x-1)dx + \int_{-1}^{3} (x+1)dx = \left[\frac{-x^2}{2} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{3} =$$

$= [(-1/2 + 1) – (-2 + 2)] + [(9/2 + 3=) – (1/2 – 1)] = 17/2$

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 4 de 1998.

La temperatura medida en una ciudad andaluza, desde las 12 horas del mediodía hasta la medianoche de un cierto día de Agosto, viene dada por la expresión $T(x) = ax^2 + bx + c$, en la que x representa el número de horas transcurridas desde el mediodía.
(a) Calcula a, b y c sabiendo que a las 5 de la tarde se alcanzó una temperatura máxima de 35º y que a las 12 del mediodía se midieron 30º.
(b) Determina de forma razonada los puntos en los que la función anterior alcanza sus extremos absolutos y relativos..

Solución

(a)
$T(x) = ax^2 + bx + c$

A las 12, x = 0, luego T(0) = 30º = c
x = 5 máximo, T(5) = 35 y además T ‘(5) = 0
T ‘(x) = 2ax + b
De T(5) = 35,obtenemos 35 = 25a + 5b + c
De T ‘(5) = o, obtenemos 0 = 10a + b
Resolviendo este sistema obtenemos a = -1/5 y b = 2, por tanto la función es
$T(x) = ax^2 + bx + c = -1/5x^2 + 2x + 30$
(b)
Los extremos relativos se encuentran en las soluciones de la primera derivada T ‘(x), y los absolutos entre los relativos y los extremos del intervalo, es decir en x = 0 (12 de la mañana), x = 5 (extremo relativo) o x = 12 (12 de la noche)
T(0) = 30º
T(5) = 35º
T(12) = 25’2º
Por tanto el máximo absoluto se alcanza a las 5 de la tarde y vale 35º, y el mínimo absoluto se alcanza a las 12 de la noche y vale 25’5º

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 4 de 1998.

Sea A una matriz no nula dada y considera la ecuación matricial AX = A + X, donde X es la incógnita.
(a) Encuentra la relación que debe existir entre las dimensiones de A y de X para que la ecuación tenga sentido..
(b) ¿ Puede ser la suma de dos soluciones una nueva solución? ¿ Y el producto de un número por una solución? Justifica la respuesta
(c) Si $A=\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y buscamos una solución de la forma $X=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, discute la ecuación matricial que resulta y resuélvela cuando sea posible

Solución

(a)
$A \neq O$
AX = A + X
A + X para poder sumarlas tienen que tener la misma dimensión mxn
A.X para poder multiplicarlas el número de columnas de A tiene que coincidir con el número de filas de X, por tanto para que se verifique esta relación y la anterior las matrices tienen que ser cuadradas
(b)
$AX_1 = A + X_1$
$AX_2 = A + X_2$
$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = A + X_1 + A + X_2 = 2A + (X_1 + X_2) \neq A + (X_1 + X_2)$
Luego $X_1 + X_2$ no puede ser solución
Análogamente
$A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda(A + X) = \lambda A + \lambda X \neq A + \lambda X$
Luego λX tampoco puede ser solución.
(c)
$A=\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$
A.X = A + X
$A.X=\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx-y & -ky-x \\ x+2y & -y+2x \end{pmatrix}$; $A+X=\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k+x & -1+y \\ 1+y & 2+x \end{pmatrix}$
Igualando miembro a miembro, tenemos un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas
kx – y = k+ x
-ky – x = -1 –y
x + 2y = 1 + y
-y + 2x = 2 + x
Se resuelven las dos últimas y se obtiene x = 3/2 e y = -1/2.
Con estos valores entramos en la primera y obtenemos k = 2
Con estos valores entramos en la segunda y obtenemos k = 2, luego el sistema tiene solución con x = 3/2 , y = -1/2 y k=2.

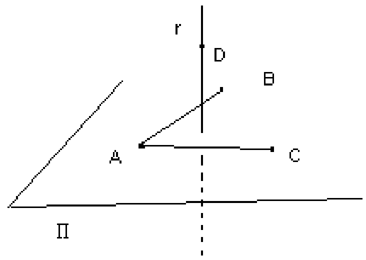
Ejercicio 4 de la opción B del modelo 4 de 1998.

Considera el tetraedro de vértices A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1) y D = (0, 0, 0).
(a) Halla la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.
(a) Halla la mínima distancia entre la recta r y la recta que pasa por los puntos A y B.
(a) Calcula el volumen del tetraedro.

Solución

(a)

A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1) y D = (0, 0, 0).



Formamos primero el plano Π tomando como pinto el A(1,0,0) y como vectores paralelos **AB** = (-1,1,0) y **AC** = (-1,0,1)

$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(1) - y(-1) + z(1) = x + y + z - 1 = 0$. Un vector normal suyo es **n** = (1,1,1)

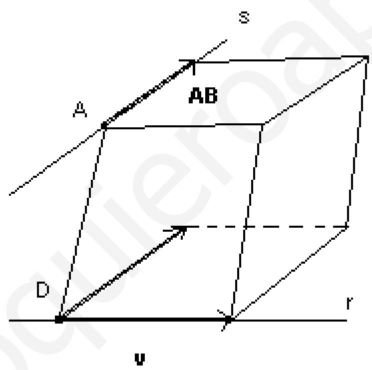
La recta pedida r pasa por D(0,0,0) 7 tiene como vector directo **v** = **n** = (1,1,1). Su ecuación vectorial es $(x,y,z) = (\lambda,\lambda,\lambda)$ con $\lambda \in \Re$

(b)

Consideremos s la recta que pasa por A y B. Tomamos como punto A(1,0,0) y como vector director **AB** = (-1,1,0)

La recta s en vectorial es $(x,y,z) = (-1 - \lambda,\lambda,0)$ con $\lambda \in \Re$

Formamos el siguiente paralelepípedo



Su volumen es V = Área base x altura = |**AB**x**v**|.d(r,s) = $\left| [\mathbf{DA},\mathbf{v},\mathbf{AB}] \right|$, donde [**DA**,**v**,**AB**], es el producto mixto de esos vectores, y |**AB**x**v**|. Es el módulo del producto vectorial de esos vectores.

De donde obtenemos la distancia entre las rectas

d(r,s) = $\left| [\mathbf{DA},\mathbf{v},\mathbf{AB}] \right| / |\mathbf{AB}x\mathbf{v}|$.

DA = (1,0,0)

$[\mathbf{DA},\mathbf{v},\mathbf{AB}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $\mathbf{AB}x\mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,-2)$; $|\mathbf{AB}x\mathbf{v}| = (1^1 + 1^2 + 2^2)^{(1/2)} = \sqrt{6}$

Por tanto d(r,s) = $\left| [\mathbf{DA},\mathbf{v},\mathbf{AB}] \right| / |\mathbf{AB}x\mathbf{v}| = 1 / \sqrt{6}$ u.l.

(c)

Volumen del tetraedro = 1/6. = $\left| [\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD}] \right|$

AB = (-1,1,0); **AC** = (-1,0,1); AD **= (-1,0,0)**

$[\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$

Luego Volumen del tetraedro = $(1/6)\cdot\left| [\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD}] \right|$ = 1/6. | -1| = 1/6 u.v.