OPCIÓN A

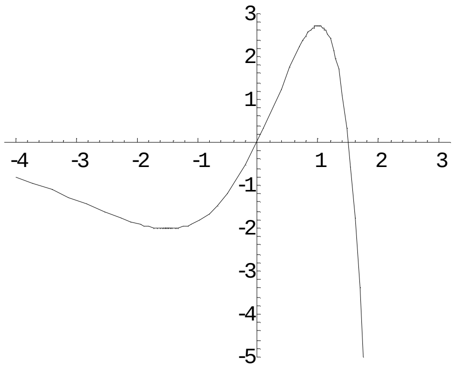
Ejercicio 1 del modelo 3 de la opción A de 1998.

Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$.
(a) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f.
(b) Calcula los máximos y los mínimos relativos de f.

Solución

(a)
El crecimiento y el decrecimiento de f (x) se obtiene del estudio de su primera derivada
$f(x) = (3x - 2x^2)e^x$
$f'(x) = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = f(x) = e^x.(-2x^2 - x + 3)$
$f'(x) = 0$, como la exponencial no es negativa son las soluciones de $2x^2 + x - 3 = 0$, y se obtiene $x = 1$ y $x = -3/2$.
Como $f'(x) < 0$, si $x < -3/2$, f(x) es decreciente en $x < -3/2$
Como $f'(x) > 0$, si $-3/2 < x < 1$, f(x) es creciente en $-3/2 < x < 1$
Como $f'(x) < 0$, si $x > 1$, f(x) es decreciente en $x > 1$
Por definición en $x = -3/2$ es un mínimo y en $x = 1$ hay un máximo., y sus valores son $f(-3/2) = -9/\sqrt{e^3}$ y $f(1) = e$

La gráfica es (no se pide)

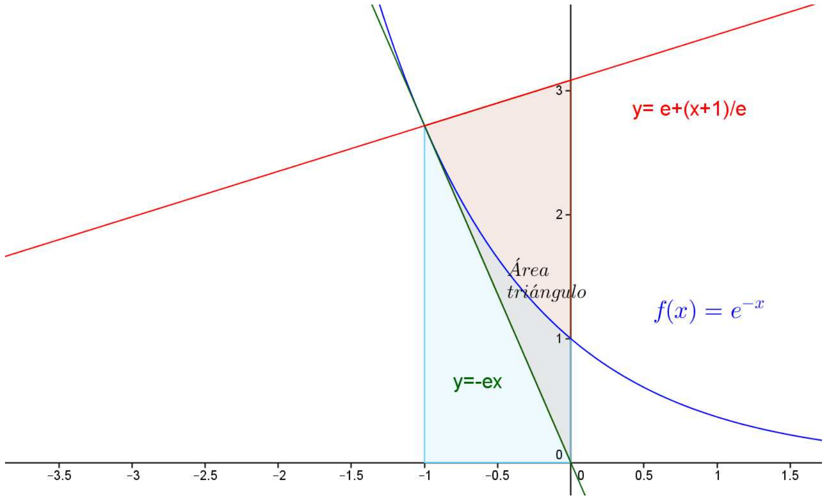


Ejercicio 2 del modelo 3 de la opción A de 1998.

(a) Halla el área del triángulo formado por el eje OX y las rectas tangentes y normal a la curva de ecuación $y = e^{-x}$ en el punto de abcisa $x = -1$.
(b) Halla el área de la región limitada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y el eje OX para los valores $-1 \le x \le 0$.

Solución

(a)
La gráfica es



La función $f(x) = e^{-x}$ está en azul.
Su recta tangente en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$
Como $f'(x) = -e^{-x}$, $f(-1) = e^1$ y $f'(-1) = -e^1$ la recta tangente es $y - e = -e.(x + 1)$ (en verde)
Su recta normal en $x = -1$ es $y - f(-1) = [-1/f'(-1)](x + 1)$, es decir $y - e = (1/e).(x + 1)$ (en granate)
El área del triángulo pedido es ½ de la base por la altura. La base es la distancia del origen de coordenadas al punto de corte de la recta normal con el eje de abcisas, que se obtiene haciendo $y = 0$ en la ecuación de la recta normal, es decir $0 - e = (1/e).(x + 1)$. Despejando obtenemos $x = -(1 + e^2)$, luego la base del triángulo es $(1 + e^2)$.
La altura del triángulo es $f(-1) = e^{-(-1)} = e$, luego
Área del triángulo = ½.base.altura = ½.$(1 + e^2)$.e u.a.

(b)

La otra área pedida es Area$=\int_{-1}^{0} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0} = (-e^0) - (-e^1) = -1 + e$ u.a.

Ejercicio 3 del modelo 3 de la opción A de 1998.

Halla la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (0, 2) y cuya directriz es la recta de ecuación y = - 2.

Solución

La parábola es el lugar geométrico de los puntos X(x,y) que equidistan de la directriz (y = -2) y del foco F(0,2), es decir d(X,F) = d(X,r)

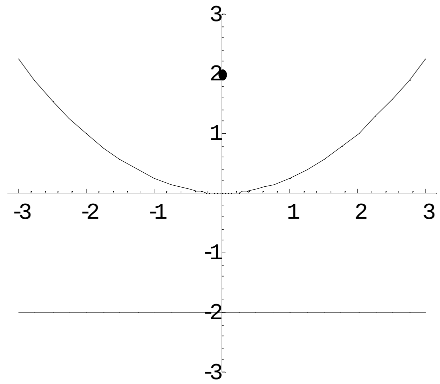
FX = (x-0, y-2)

d(X,F) = $[x^2 + (y-2)^2]^{(1/2)}$

$$d(X,r) = \frac{|y+2|}{1} = d(X,F) = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

Elevando al cuadrado tenemos $(y + 2)^2 = x^2 + (y - 2)^2$. Operando y simplificando nos queda $x^2 = 4y$

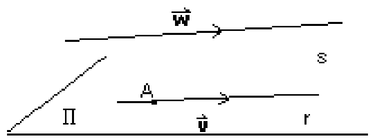
Su gráfica es



Ejercicio 4 del modelo 3 de la opción A de 1998.

Sean r y s las rectas dadas por : $r \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} 3x2y-3=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$. Determina la ecuación de un plano que contenga a r y sea paralelo a s.

Solución



Para el plano Π tomamos de la recta r un punto, el A y un vector director **v**, y de la recta s otro vector director **v**

Para el punto A tomamos y = 1, x = 0, sustituimos en la recta r y obtenemos z = 1, luego A(0,1,1)

$$v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(1,-1,3)\ ;\quad w=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(0,0,7)$$

Luego el plano Π es: $\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7.\begin{vmatrix} x & y-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7.(- x - y + 1) = 0$. Simplificando – x – y + 1 = 0.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 del modelo 3 de la opción B de 1998.

(a) Calcula os extremos relativos y absolutos de la función f : [-7, 1] $\rightarrow \Re$ definida por $f(x) = x^3 + 6x^2 + 49$.

(b) Sea β el punto en el que f alcanza su máximo absoluto. Calcula $\int_{-7}^{\beta} f(x)dx$

Solución

(a)

Los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 49$, pueden ser las soluciones de f '(x) = 0

f '(x) = $3x^2 + 12x$;, f '(x) = 0, nos da x = = y x = - 4

f ''(x) = 6x +12

Como f ''(0) = 12 > 0, x = 0 es un mínimo

Como f ''(- 4) = - 12 < 0, x = - 4 es un máximo
(a)
El máximo absoluto es el mayor valor de la función en los extremos del intervalo o en los puntos que anulan la primera derivada. Sustituimos f(x) en –7, -4, 0 y 1.
f (- 7) = 0
f (0) = 49
f (1) = 56
f (- 4) = 81
resulta que el máximo absoluto se alcanza en x = -4, luego β = - 4 y

$$\int_{-7}^{\beta} f(x)dx=\int_{-7}^{-4}(x^3+6x^2+49)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}+49x\right]_{-7}^{-4}= (4^4/4 - 2.4^3 - 49.4) - (7^4/4 - 2.7^3 - 49.7) = 1443/4$$

Ejercicio2 del modelo 3 de la opción B de 1998.

Sea f:(-π, π) la función derivable que para $x \neq 0$ verifica f(x) = [Ln(1+x^2)/sen(x)], siendo Ln(t) el logaritmo neperiano de t.
(a) ¿Cuanto vale f(0)?
(b) ¿Cuanto vale f '(0)?

Solución

(a)
Supongo que f(0) será el verdadero valor de la función en x = 0, es decir $\lim_{x\to 0}$ f(x).
f(0) = $\lim_{x\to 0}$ f(x) = $\lim_{x\to 0}$ [Ln(1+x^2)/sen(x)] = ((0 / 0)) , aplicamos la regla de L'Hôpital
= $\lim_{x\to 0}$ {[2x(1+x^2)]/cos(x)} = $\lim_{x\to 0}$ [2x / (1+x^2).cos(x)] = 0 / 1.1 = 0 /1 = 0.
(b)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} [f(0+h) - f(0)] / h = \lim_{x\to 0} [f(h)/h] = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\ln(1+h^2)}{\text{sen}(h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h^2)}{h.\text{sen}(h)}=\frac{0}{0}$$

le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2h}{1+h^2}}{1.\text{sen}(h)+h.\cos(h)}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{(1+h^2)(\text{sen}(h)+h\cos(h))}=\frac{0}{0}$$

le aplicamos la regla de L'Hôpital

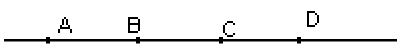
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2}{(2h)(\text{sen}(h)+h\cos(h))+(1+h^2)(2\cos(h)-h\text{sen}(h))}= 2/(0+1.(1+1)) = 2/2 = 1$$

Ejercicio 3 del modelo 3 de la opción B de 1998.

Cuatro puntos A, B, C y D tienen las siguientes coordenadas: A=(1, 2, 3), B = (0, 1, -2), C = (3, 1, 0) y D = (m, -1, 4).
(a) ¿Existe algún valor de *m* para el que los cuatro puntos están sobre una línea recta? En caso afirmativo, determina dicha recta; en caso negativo, di porqué no están alineados..
(b) ¿Existe algún valor de *m* para el que los cuatro puntos están sobre un plano? En caso afirmativo, determina dicho plano; en caso negativo, di porqué no son coplanarios.
(c) Para *m* = 2, ¿determinan estos cuatro puntos un tetraedro? En caso afirmativo, calcula el volumen de dicho tetraedro; en caso negativo, di porque no lo determinan.

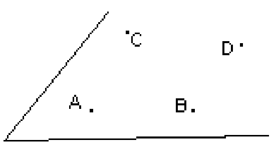
Solución

(a)



Si los cuatro puntos están alineados los vectores **AB**, **AC** y **AD** son dependientes y det(**AB**,**AC**,**AD)** = 0
AB = (-1,-1,-5); **AC** = (2,-1,-3); **AD** = (m –1, -3,1)

det(**AB**,**AC**,**AD)** = $\begin{vmatrix} -1 & -1- & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ m-1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ = -1(-1-9) +1(-1+5m-5) –5(-6+m-1) = 39 $\neq$ 0, luego los cuatro puntos no están en una recta.
(b)



Con los puntos A, B y C formo un plano Π tomando como punto A y como vectores paralelos **AB** y **AC**. Después fuerzo a que el punto D pertenezca al plano

A = (1, 2, 3,), **AB =** (-1,-1,-5), **AC** = (2,-1,-3)

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (x-1)(3-5) - (y-2)(3+10) + (z-3)(1+2) = -2x - 10y + 3z + 13 = 0$$

Como D $\in \Pi$, -2(m) + 10 + 12 + 13 = 0, de donde m = 35/2 para que D $\in \Pi$,

(c)

Hemos visto en el apartado (b) que para m = 35/2 D $\in \Pi$, y no puede formarse un tetraedro, luego si m = 2, D $\notin \Pi$, y los cuatro puntos forman un tetraedro.

Sabemos que su volumen es V = 1/6 $|$[**AB**, **AC** , **AD**]$|$

AB = (-1,-1,-5) , **AC** = (2,-1,-3) , **AD** = (m –1, -3,1) = (1,-3,1)

V = 1/6 $|$[**AB**, **AC** , **AD**]$|$ =

$$=1/6.\left|\begin{vmatrix} -1 & -1- & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right| = 1/6.\left|\begin{vmatrix} -1 & -1- & -5 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix}\right| = 1/6|(-1)(-16)| = 16/6 = 8/3 \text{ u.v.}$$

Ejercicio 4 del modelo 3 de la opción B de 1998.

Considera el sistema de ecuaciones lineales;

$$2x - y + z = 3,$$
$$x - y + z = 8,$$
$$3x - y + mz = -2m.$$

(a) Determina si existe y, en ese caso, calcula el valor del parámetro *m* para el cual los tres planos determinados por las ecuaciones del sistema se cortan en una línea recta.

(b) Halla la ecuación del plano que contienen a la recta determinada en el apartado anterior y pasa por el punto (2, 1, 3).

Solución

(a)

Para que se corten en una recta rango(A) = 2 = rango(A^*), con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & m \end{pmatrix}$, y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & m & -2m \end{pmatrix}$

Para que rango(A) = 2, |A| = 0

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 1(-m + 1) = 0, \text{ de donde } m = 1.$$

Para que rango(A^*) = 2, el siguiente menor tiene que ser cero.

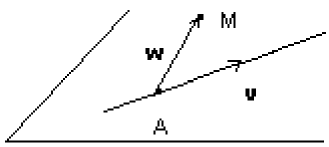
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & -2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2m-3 \end{vmatrix} = 1(2m + 3 - 5) = (2m - 2) = 0, \text{ de donde } m = 1.$$

Como ambos valores coinciden para m = 1, los tres planos se cortan en una recta, que es

$$2x - y + z = 3,$$
$$x - y + z = 8,$$

pues lo único que hemos hecho ha sido suprimir la tercera ecuación.

(b)



Para formar el plano de la recta tomamos un punto A y un vector director, y el otro vector paralelo del plano será **AM**, con M(2, 1, 3).

Para el punto A tomo z = 1, cono lo cual me queda

$$2x - y = 2,$$
$$x - y = 7,$$

resolviendo este sistema obtengo x = - 5 e y = -12, es decir A(-5,-12,1)

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1+1) - \mathbf{j}(2-1) + \mathbf{k}(-2+1) = (0,-1-1)$$

AM = (7,13,2)

Luego el plano pedido es $\Pi \equiv \begin{vmatrix} x+5 & y+12 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 13 & 2 \end{vmatrix} = (x+5)(-2+13) - (y+12)(7) + (z-1)(7) = 11x - 7y + 7z - 36 = 0$