# Opción A

## Ejercicio 1 de la opción A del modelo 2 de 1999.

Considera las funciones $f : R \to R$ y $g : R \to R$ definidas por $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y $g(x) = -x^2 - 3x + 10$

(a) [1 punto] Representa gráficamente ambas funciones.

(b) [1'5 puntos] Halla el área de la región del plano que está formada por todos los puntos (x,y) que cumplen $f(x) \le y \le g(x)$

### Solución

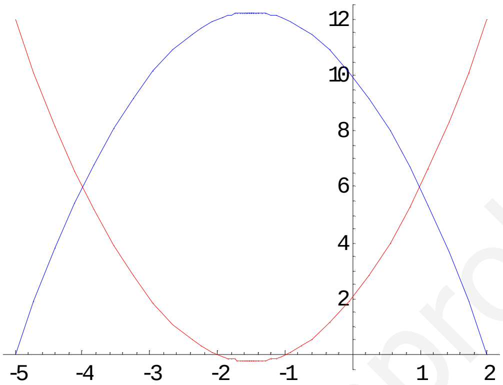
(a)

Las funciones $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y $g(x) = -x^2 - 3x + 10$ son parábolas, por tanto con sus vértices prácticamente podemos dibujarlas sabiendo que f tiene las ramas hacia arriba y g hacia abajo

La abcisa del vértice es la solución de $f' = 0$ y de $g' = 0$, pues son extremos relativos.

El vértice de f es (-3/2, -1/4) y el vértice de g es (-3/2, 49/4)

Las graficas son




(a)

Nos están pidiendo el área encerrada por las funciones f(x) y g(x) para lo cual tenemos que calcular los puntos donde coinciden, es decir las soluciones de la ecuación f(x) = g(x).

$x^2 + 3x + 2 = -x^2 - 3x + 10$, es decir $2x^2 + 6x - 8 = 0$. Sus soluciones son $x = -4$ y $x = 1$. Luego

$$\text{Area}=\int_{-4}^{1}(g(x)-f(x))dx=\int_{-4}^{1}(-2x^2-6x+8)dx=\left|\frac{-2x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+8x\right|_{-4}^{1}=$$

$= [ (-2/3 - 3 + 8) - (- 2.(-4)^3/3 - 3\cdot 16 - 32) ] = -2/3 + 5 - 128/3 + 80 = 125/3$ u. a.

## Ejercicio 2 de la opción A del modelo 2 de 1999.

[2'5 puntos] Calcula las asíntotas de la gráfica de la función f definida para x = - 1 por $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$, y estudia la posición de dicha gráfica con respecto a las asíntotas

### Solución

$$f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+1}$$

La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de f(x) porque

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} [ (x^2+3x+1) / (x+1) ] = - 1 / 0^+ = -\infty$

Análogamente $\lim_{x\to -1^-} f(x) = - 1 / 0^- = +\infty$

Y ya tenemos la posición de la gráfica respecto a la asíntota vertical.

Como en la función f(x) el numerador es un grado mas que en el denominador, tenemos una asíntota oblicua de la forma $y = mx + n$ ( es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$) con

$m = \lim_{x\to\infty} [ f(x) / x ] = \lim_{x\to\infty} [ (x^2+3x+1) / x.(x+1) ] = 1$

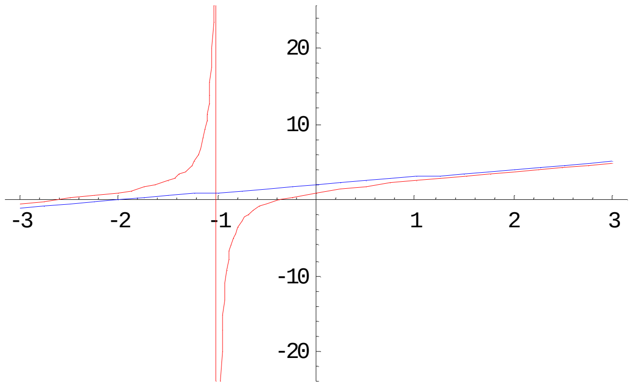
$n = \lim_{x\to\infty} [ f(x) - mx ] = \lim_{x\to\infty} [ (x^2+3x+1) / (x+1) - x ] = \lim_{x\to\infty} [ (2x+1) / (x+1) ] = 2$

Luego la asíntota oblicua es $y = mx + n = x + 2$

Como $\lim_{x\to\infty} [ f(x) - ( x+2) ] = 0^-$, la gráfica está por debajo en $+\infty$

Como $\lim_{x\to-\infty} [ f(x) - ( x+2) ] = 0^+$, la gráfica está por encima en $-\infty$

Aunque no la piden la gráfica es




Donde la asíntota oblicua está en azul

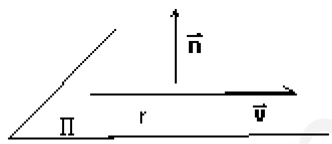
**Ejercicio 3 de la opción A del modelo 2 de 1999.**

Considera el plano $\Pi$ y la recta r dados por $\Pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$ y $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$

(a) [1'5 puntos] Halla los valores de a y b para los que r está contenida en $\Pi$.
(b) [1 punto] ¿Existe algún valor de a y algún valor de b para los que la recta r es perpendicular al plano $\Pi$.

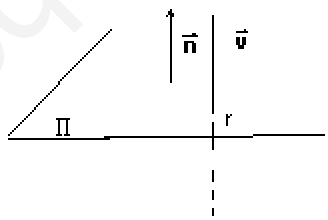
**Solución**

(a)




$\Pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$ y $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$

Un vector normal de $\Pi$ es **n** = (a,2,-4)
Un punto de la recta r es A(3,1,3), y un vector director es **v** = (4,-4,1)
Como la recta r está en el plano $\Pi$, los vectores **v** y **n** son perpendiculares y su producto escalar es cero, luego
(a,2,-4)•(4,-4,1) = 0 = 4a - 8 – 4 = 0, de donde a = 3
Como la recta r está en el plano $\Pi$, A $\in$ $\Pi$, es decir 3(3) + 2 – 12 + b = 0, de donde b = 1
(b)




Para que el plano $\Pi$ y la recta r sean perpendiculares sus vectores normal y director tienen que ser dependientes, es decir **v** = $\lambda$ **n**, es decir sus coordenadas tienen que ser proporcionales
a/4 = 2/-4 = -4/1
pero como 2/-4 $\neq$ -4/1, no existe ningún punto a ni b para que sean perpendiculares el plano y la recta.

**Ejercicio 4 de la opción A del modelo 2 de 1999.**

Una persona trata de adivinar, mediante ciertas pistas, el coste de tres productos A, B y C que un amigo suyo ha comprado.
Pista 1: Si compro una unidad de A, dos de B y una de C me gasto 900 ptas.
Pista 2: Si compro m unidades de A, m + 3 de B y 3 de C me gasto 2950 ptas.
(a) [1 punto] ¿Hay algún valor de m para el que estas dos pistas no son compatibles?
(b) [1puntos] Si en la Pista 2 se toma m = 4, ¿es posible saber el coste de cada uno de l os productos?
(c) [2'5 puntos] Pista 3. el amigo le dice finalmente que el producto C vale 5 veces lo que vale el producto A y que en la Pista 2 se tiene m = 4. ¿Cuánto valen A, B y C?

**Solución**

(a)
A + 2B + C = 900
mA + (m+3)B + 3C = 2950
La matriz de los coeficientes M y la ampliada $M^*$ son

$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & m+3 & 3 \end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 900 \\ m & m+3 & 3 & 2950 \end{pmatrix}$

De la matriz $M^*$, tenemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 900 \\ 3 & 2950 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto rango($M^*$) = 2

Para que el sistema sea incompatible tiene que ser rango(M) = 1, es decir

$0=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m+3 & 3 \end{vmatrix}=6-m-3$, de donde m = 3

$0=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 3 \end{vmatrix}=3-m$, de donde m = 3

Luego tomando m = 3, el sistema es incompatible.

(b)

Si m = 4, tenemos

A + 2B + C = 900

4A + 7B + 3C = 2950

Son dos ecuaciones con tres incógnitas y rango (M) = rango($M^*$) = 2, por tanto el sistema es compatible e indeterminado y depende de uno de ellos

(c)

Con la última condición C = 5A, el sistema es

A + 2B + C = 900

4A + 7B + 3C = 2950

C = 5A, resolviéndolo se obtiene A = 100, B = 150 y C = 500.

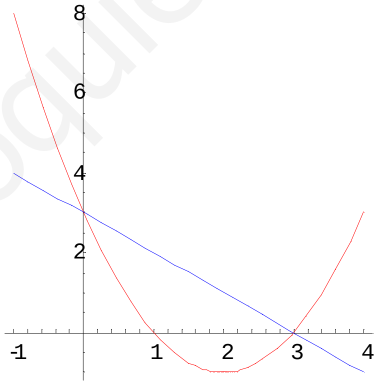
## Opción B

### Ejercicio 1 de la opción B del modelo 2 de 1999.

[2’5 puntos] Dibuja y halla el área de la región limitada por la recta $y = -x + 3$ y la curva de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$.

**Solución**

La parábola tiene las ramas hacia arriba y su vértice en el punto (2,-1) (su abcisa anula la primera derivada), por tanto las gráficas son




Para hallar el área de la región limitada por las dos funciones tenemos que calcular las soluciones de la ecuación $x^2 - 4x + 3 = -x + 3$, es decir $x^2 - 3x = 0$., de donde x = 0 y x = 3

$$\text{Area}=\int_0^3\left[(-x+3)-(x^2-4x+3)\right]dx=\int_0^3\left[-x^2+3x\right]dx=\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -3^3/3 + 3.9/2 = 9/2 \text{ u.a.}$$

### Ejercicio 2 de la opción B del modelo 2 de 1999.

Una partícula se desplaza a lo largo de la curva de ecuación y = f(x) siendo $f:\Re \to \Re$ la función dada por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) [1 punto] ¿Hay algún punto en la trayectoria de la partícula en el que dicha curva no admite recta tangente?.

(b) [1 punto] Determina las coordenadas del punto de la trayectoria en el que se alcanza la máxima altura.

(c) [0’5 puntos] ¿A que recta se aproxima la trayectoria cuando $x \to \infty$? Justifica la respuesta.

**Solución**

(a)

Si en un punto no existe la derivada en dicho punto no existe recta tangente. Veamos si existe f ‘(0)

$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ xe^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ ; $f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ e^{-x}+xe^{-x}(-1) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Existe f '(0) si y solo si $f'(0^+) = f'(0^-)$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0} [e^{-x}(1-x)] = e^0(1-0) = 1$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0} [0] = 0$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, no existe f '(0), por tanto en x = 0 no existe recta tangente.

(b)

El máximo de f(x) es la solución de f '(x) = 0, comprobando que en f '' al sustituir de < 0

Tomamos la rama $f(x) = x.e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$, como la exponencial no es cero, $1 - x = 0$ de donde x = 1.

$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x-2)$

$f''(1) = e^{-1}(1-2) = e^{-1}(-1) < 0$, luego es un máximo

El punto máximo es $(1, 1.e^{-1}) = (1, 1/e)$

(c)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [x.e^{-x}] = \lim_{x\to+\infty} [x/e^x] = [\infty/\infty] =$

Aplicándole la regla de L'Hôpital

$= \lim_{x\to+\infty} [1/e^x] = 1/\infty = 0$, es decir se aproxima a la recta y = 0

## Ejercicio 3 de la opción B del modelo 2 de 1999.

Considera el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 5y + 4z &= -2 \\ x + 3y + m^2z &= m \end{aligned}$$

(a) [1 punto] Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m

(b) [1 punto] Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado

(b) [0'5 puntos] Razona para que valores de m tiene inversa la matriz de los coeficientes del sistema.

### Solución

(a)

Dado el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 5y + 4z &= -2 \\ x + 3y + m^2z &= m \end{aligned}$$

su matriz de los coeficientes M y su matriz ampliada $M^*$ son

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{pmatrix} \quad y \quad M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & m^2 & m \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo menos rango(M) = 2

Para que rango(M) = 3 , tiene que ser $|M| \neq 0$. $|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & m^2-3 \end{vmatrix}=m^2-3+2=m^2-1.$

$|M| \neq 0$ si y solo si $m^2 - 1 \neq 0$, es decir si $m \neq \pm 1$

Si m = 1, tenemos que rango(M) = 2, y en $M^*$ tenemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto rango($M^*$) = 3 y el sistema es incompatible.

Si m = - 1, tenemos que rango(M) = 2, y en $M^*$ tenemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$, por tanto rango($M^*$) = 2 y el sistema es compatible.

(b)

Si m = -1 el sistema es compatible e indeterminado, nos quedamos con las dos primeras ecuaciones

x + 2y + 3z = - 1

2x + 5y + 4z = -2

Tomando $z = \lambda$, nos resulta

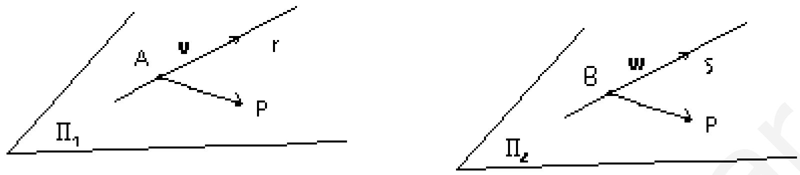
$x + 2y = - 1 - 3\lambda$
$2x + 5y = -2 - 4\lambda$
Multiplicando por –2 la primera y sumándole a la segunda
$y = 2\lambda$, y sustituyendo en la primera queda $x = -1 - 7\lambda$, por tanto la solución del sistema es $(x,y,z) = (-1-7\lambda, 2\lambda,\lambda)$ con $\lambda \in \Re$
(c)
La matriz M tiene inversa si y solo si $|M| \neq 0$ , es decir si $m \neq \pm 1$

**Ejercicio 4 de la opción B del modelo 2 de 1999.**

[2'5 puntos] Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P = ( 1, 0, 2 ) y corta a las rectas r y s dadas por:

$$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x+6y+2=0 \\ y+2z=0 \end{cases}.$$

**Solución**




Construimos la recta pedida como intersección de dos planos $\Pi_1$ y $\Pi_2$, que contienen respectivamente a la recta r y el punto P, y a la recta s y al punto P

De la recta r tomamos un punto el A(0,-2,0) y el vector **v** = (3,1,1,). Para el plano $\Pi_1$, necesitamos también el vector **AP** = (1,2,2)

$$\Pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(-1) -(y)(2) + (z-2)(5) = -x -2y + 5z - 9 = 0$$

De la recta s tomamos un punto el B(2,0,2) y el vector **w** = (2,6,0)**x**(0,1,2) = (12,-4,2) . Para el plano $\Pi_2$, necesitamos también el vector **BP** = (2,0,2)

$$\Pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 12 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)(-8) -(y)(24-4) + (z-2)(8) = -8x -20y + 8z - 8 = 0$$

La recta pedida es
$- x -2y + 5z - 9 = 0$
$- 8x -20y + 8z - 8 = 0$