Opción A

Ejercicio nº 1 de la opción A de septiembre de 1999

[2'5 puntos] Calcula el valor de la integral $\int_{-1}^{2} \frac{2x^3-x^2-12x-3}{x^2-x-6}\,dx$

Solución

Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador tenemos que efectuar la división

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2-12x-3 & x^2-x-6 \\ \cline{2-2} -2x^3+2x^2+12x & 2x+1 \\ \cline{1-1} x^2-3 & \\ -x^2+x+6 & \\ \cline{1-1} \quad x+3 & \end{array}$$

$I = \int \frac{2x^3-x^2-12x-3}{x^2-x-6}\,dx = \int\left(2x+1+\frac{x+3}{x^2-x-6}\right)dx = x^2+x+\int\frac{x+3}{x^2-x-6}\,dx = x^2+x+I_1.$

$I_1 = \int\frac{x+3}{x^2-x-6}\,dx = \int\frac{A}{x-3}\,dx + \int\frac{B}{x+2}\,dx = ALn|x-3| + BLn|x+2| = \frac{6}{5}Ln|x-3| - \frac{1}{5}Ln|x+2|$

$x^2 - x - 6 = 0$. Se resuelve y sale $x = 3$ y $x = -2$, por tanto $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

$$\frac{x+3}{x^2-x-6} = \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

Para $x = -2 \rightarrow 1 = B(-5) \rightarrow B = \frac{-1}{3}$

Para $x = 3 \rightarrow 6 = A(5) \rightarrow A = \frac{6}{35}$

Luego $\int_{-1}^{2}\frac{2x^3-x^2-12x-3}{x^2-x-6}\,dx = \left[x^2+x+I_1\right]_1^2 = \left[x^2+x+\frac{6}{5}Ln|x-3|-\frac{1}{5}Ln|x+2|\right]_{-1}^{2} =$

$= (4 + 2 + 6/5Ln(1) - 1/5Ln(4)) - (1 - 1 + 6/5Ln(4) - 1/5Ln(1)) = 6 - 7/5Ln(4)$

Ejercicio nº 2 de la opción A de septiembre de 1999

Considera la curva de ecuación $y = x^2 - 2x + 3$.

(a) [1'5 puntos] Halla una recta que sea tangente a dicha curva y que forme un ángulo de 45º con el eje de abcisas.

(b) [1 punto] ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal? En caso afirmativo, halla la ecuación de dicha tangente; en caso negativo, explica el porqué.

Solución

(a) $y = x^2 - 2x + 3$. Si es tangente su pendiente es $tg(45º) = y' = 2x - 2$, es decir $1 = 2x - 2$, de donde $x = 3/2$

La recta tangente es $y - f(3/2) = f'(3/2)(x - 3/2)$. Pero $f(3/2) = 9/4 - 3 + 3 = 9/4$ y $f'(3/2) = 1$ luego la recta es $y - 9/4 = 1(x - 3/2)$.

(b) La tangente horizontal la suelen tener los extremos, es decir máximos o mínimos relativos. Como la gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba es un mínimo. Vamos a calcularlo

$y' = 2x - 2$; $y' = 0$; $2x - 2 = 0$, de donde $x = 1$. Abcisa del mínimo

Como $y'' = 2 > 0$, efectivamente $x = 1$ es un mínimo.

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, es decir $y - 2 = 0(x - 1)$, operando $y = 2$.

Ejercicio nº 3 de la opción A de septiembre de 1999

[2'5 puntos] Prueba que todos los planos de la familia $(3+\lambda)x + (3 - \lambda)y + (5 - 2\lambda)z = \lambda$, (con $\lambda \in \Re$) contienen una misma recta y halla unas ecuaciones paramétricas de dicha recta.

Solución

$(3+\lambda)x + (3 - \lambda)y + (5 - 2\lambda)z = \lambda$, es un haz de planos. Veamos los dos planos del haz

$3x + \lambda x + 3y - \lambda y + 5z - 2\lambda z - \lambda = 0$

$(3x + 3y + 5z) + \lambda(x - y - 2z - 1) = 0$

Los planos que forman el haz son $3x + 3y + 5z = 0$ y $x - y - 2z - 1 = 0$.

La recta generatriz del haz es $\begin{cases} 3x+3y+5z=0 \\ x-y-2z-1=0 \end{cases}$. En forma paramétrica sería, tomamos $z = \lambda$

De $\begin{cases} 3x+3y=-5\lambda \\ x-y=1+2\lambda \end{cases}$, por Cramer tenemos x = $\dfrac{\begin{vmatrix} -5\lambda & 3 \\ 1+2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-3-\lambda}{-6}$ = 1/2 + (1/6)λ; y = $\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -5\lambda \\ 1 & 1+2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{3+\lambda}{-6}$ = -1/2 + (-1/6)λ; luego la recta en paramétricas es $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\lambda \\ y=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Ejercicio nº 4 de la opción A de septiembre de 1999

Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Calcula A^tA y AA^t donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

(b) [1'5 puntos] Siendo X una matriz columna, discute y, en su caso, resuelve la ecuación matricial $AA^tX = \lambda X$ según los valores del parámetro real λ.

Solución

(a) $A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $AA^tX = \lambda X$; $(AA^t - \lambda\cdot I)X = O_2$

$[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda]$ X = O; $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Como el sistema es homogeneo tiene solución distinta de la trivial (x,y) = (0,0) si y solo si $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ = (1 - λ)(2 - λ) = 0, de donde λ = 1 y λ = 2

Para λ = 1 tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, es decir la solución es (x,y) = (x,0) es decir y = 0 y x cualquier valor.

Para λ = 2 tenemos $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir la solución es (x,y) = (0,y) es decir x = 0 e y cualquier valor.

Opción B

Ejercicio nº 1 de la opción B de septiembre de 1999

(a) [1 punto] Halla las asíntotas de la función definida para x > 0 por f(x) = $\dfrac{1+x^2}{x}$.

(b) [1 punto] Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales si los hay.

(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f

Solución

(a) Como $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1+x^2}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, x = 0 es una A.V. de f; $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1+x^2}{x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Tiene una A.O. y = mx + n porque es una cociente con el numerador de grado una unidad más que el denominador, con

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1$; $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

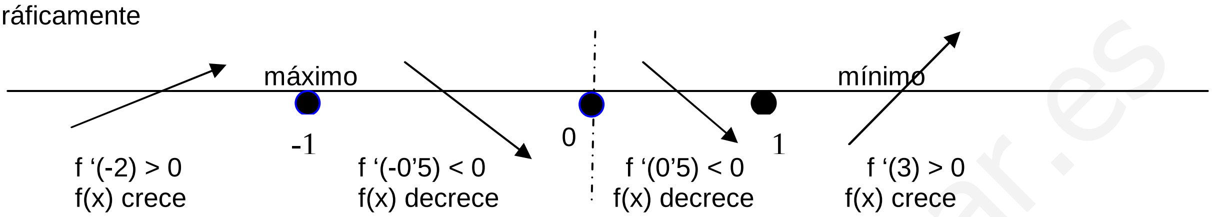
luego la A.O. es y = mx + n = x. Como es un cociente de polinomios es la misma en + ∞ com en - ∞.
Se puede hacer rapidamente dividiendo numerador entre denominador

$$\begin{array}{l|l} 1+x^2 & x \\ \hline -x^2 & x \\ \hline 1 & \end{array}$$

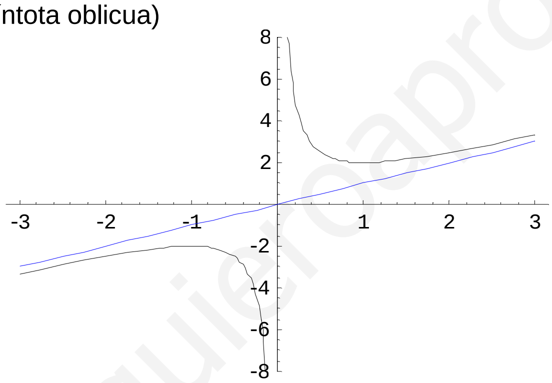
b) Estudio de f '(x)

$f'(x) = \frac{2x(x)-(1+x^2)}{(x)^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

f '(x) = 0; $x^2 - 1 = 0$; $x^2 = 1$, de donde x = 1 y x = - 1 que serán los posibles máximos o mínimos
Hay que tener cuidado co x = 1, pues ahí no está definida la función
Gráficamente



f(x) crece en (- ∞, -1)∪(1, + ∞), decrece en (-1, 0)∪(0,1). Tendría un máximo relativo en x = -1 con valor f(-1) = -2, y un mínimo relativo en x = 1 con valor f(1) = 2.
En x = 0 no está definida y tiene una asíntota vertical
c) Su gráfica es (en azul la asíntota oblicua)



Ejercicio nº 2 de la opción B de septiembre de 1999

[2'5 puntos] Encuentra la función derivable f : [-1,1] → ℜ que cumple f(1) = - 1 y

$f'(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x-1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Solución

$f'(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x-1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral tenemos

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^2 - 2x)\,dx = x^3/3 - x^2 + K$ en el intervalo [-1,0) y

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (e^x - 1)\,dx = e^x - x + M$ en el intervalo [0,1]).

Como es derivable es continua, en particular en x = 0, luego $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0} (e^x - x + M) = e^0 - 0 + M = 1 + M$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^3/3 - x^2 + K) = 0 + 0 + K$; por tanto K = 1 + M

Por otro lado como f(1) = - 1, $-1 = e^1 - 1 + M$, de donde M = - e y K = 1 + M = 1 – e.

La función pedida es $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + (1-e) & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Ejercicio nº 3 de la opción B de septiembre de 1999

[2'5 puntos] Clasifica el diguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ,

$$\left.\begin{array}{ccccccc}(1+\lambda)x & + & y & + & z & = & 1\\ x & + & (1+\lambda)y & + & z & = & \lambda\\ x & + & y & + & (1+\lambda)z & = & \lambda^2\end{array}\right\}$$

Solución

$$\left.\begin{array}{ccccccc}(1+\lambda)x & + & y & + & z & = & 1\\ x & + & (1+\lambda)y & + & z & = & \lambda\\ x & + & y & + & (1+\lambda)z & = & \lambda^2\end{array}\right\};$$

La matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{pmatrix}$; matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ -\lambda & \lambda & 0\\ -\lambda & 0 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^2\cdot\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \lambda^2\cdot\begin{vmatrix}2+\lambda & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \lambda^2\cdot 1(2+\lambda+1) = \lambda^2\cdot(\lambda+3)$$

Resolvemos $\lambda^2\cdot(\lambda + 3) = 0$ y sus soluciones son $\lambda = 0$ (doble) y $\lambda = -3$.

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -3$, rango(A) = rango(A^*) = 3 y el sistema es compatible y determinado, es decir tiene solución única.

Si $\lambda = 0$

$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, tenemos que rango(A) = 1 pues las tres filas son iguales

En $A^* = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} \neq 0$, tenemos que rango($A^*$) = 2.

Como rango(A) = 1 $\neq$ rango(A^*) = 2. el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si $\lambda = -3$

$A = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 3 \neq 0$, tenemos que rango(A) = 2

En $A^* = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9\end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 9\end{vmatrix} = 21 \neq 0$, tenemos que rango($A^*$) = 3.

Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3. el sistema es incompatible y no tiene solución.

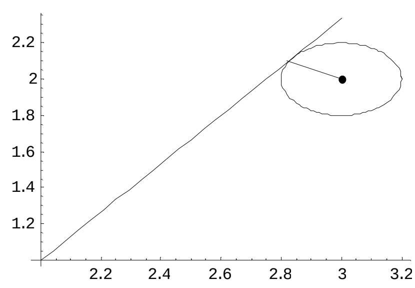
Ejercicio nº 4 de la opción B de septiembre de 1999

(a) [1'75 puntos] Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C = (3,2) y una de cuyas rectas tangentes tiene de ecuación $4x - 3y - 5 = 0$

(b) [0'75 puntos] Determina si el punto X=(3,3,) es interior, es exterior o está en la circunferencia.

Solución

(a)



radio = r = d(C, recta) = $\dfrac{|12-6-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}$ = 1/5. La circunferencia es $(x-3)^2 + (y-2)^2 = (1/5)^2$

(b)

Para ver como es el punto calculamos la potencia del punto respecto a la circunferencia

$P_C(3,3) = (3-3)^2 + (3-2)^2 - (1/5)^2 = 24/25 > 0$, por tanto el punto es exterior a la circunferencia.